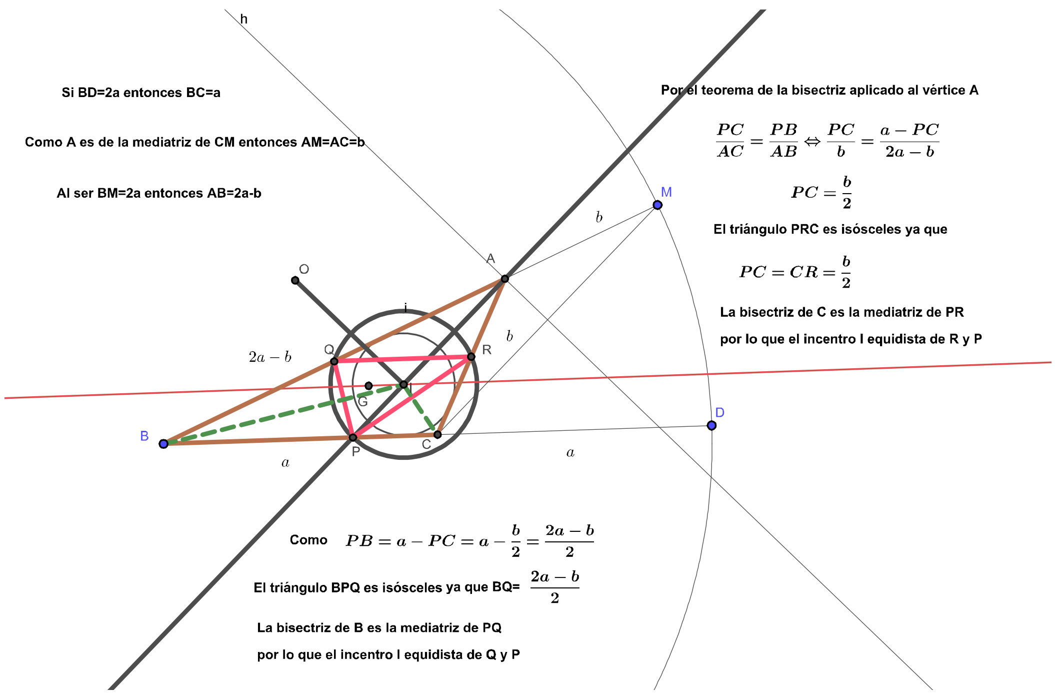
Ejercicio 1 *Sea un segmento BD cuyo punto medio es C. Considere un punto cualquiera M en el círculo del centro B y radio BD.*
La mediatriz del segmento CM corta la recta BM en el punto A.
Sean G el baricentro, I el centro del círculo inscrito, O el centro del círculo circunscrito del triángulo ABC.
Sean P el punto de intersección de la recta AI con la recta BC, Q y R los puntos medios de los lados AB y AC.
a) Demostrar que la recta GI es paralela a la recta BC.
b) Demostrar que la recta OI es perpendicular a la rectaAI
c) Demostrar que el círculo circunscrito al triángulo PQR y el circulo inscrito del triángulo ABC son concéntricos

Fondanaiche P. (2019): Comunicación personal

Solución

Dibujado el problema



1) En el triángulo ABC se verifica que el lado $BC = a$ es la media aritmética de los lados $AB = 2a - b, AC = b$. Por lo que; en virtud del lema posterior podemos afirmar que la recta GI es paralela al lado BC siendo G, I el baricentro e incentro del $\triangle ABC$

2) Veamos ahora que OI es perpendicular a AI siendo O, I el circuncentro e incentro del triángulo

Los datos del triángulo son $\begin{bmatrix} AB = 2a - b \\ AC = b \\ BC = a \end{bmatrix}$

Como su semiperímetro es $s = \frac{3a}{2}$:

Entonces $\left[\begin{array}{c} s-a=\frac{a}{2} \\ s-b=\frac{3a-2b}{2} \\ s-2a+b=\frac{2b-a}{2} \end{array}\right]$ lo que nos permite calcular su superficie[1]

$$S=\sqrt{\frac{3a}{2}\frac{a}{2}\frac{3a-2b}{2}\frac{2b-a}{2}}=\frac{a}{4}\sqrt{3\left(3a-2b\right)\left(2b-a\right)}$$

Los radios[2] r y R de la circunferencia inscrita y circunscrita al triángulo ABC son

$$r=\frac{S}{s}=\frac{\frac{a}{4}\sqrt{3\left(3a-2b\right)\left(2b-a\right)}}{\frac{3a}{2}}=\frac{\sqrt{3\left(3a-2b\right)\left(2b-a\right)}}{6}$$

$$R=\frac{ab(2a-b)}{4S}=\frac{b(2a-b)}{\sqrt{3\left(3a-2b\right)\left(2b-a\right)}}$$

$$2rR=\frac{b(2a-b)}{3}$$

Calculemos OI^2+AI^2 y comprobemos que coincide con OA^2
Por la fórmula de Euler $OI^2=R^2-2rR$ y como $OA^2=R^2$
$OI^2+AI^2=OA^2 \Longleftrightarrow R^2-2rR+AI^2=R^2 \Longleftrightarrow AI^2=2rR$
Sabemos[3] que $AI^2=\frac{b(2b-a)(s-a)}{s}=\frac{b(2b-a)\frac{a}{2}}{\frac{3a}{2}}=\frac{b(2a-b)}{3}=2rR$ c.q.d
3) Por el teorema de la bisectriz aplicado al vértice A del triángulo ABC

$$\begin{aligned} \frac{PC}{AC} &= \frac{PB}{AB} \Longleftrightarrow \frac{PC}{b}=\frac{a-PC}{2a-b} \\ PC &= \frac{b}{2} \end{aligned}$$

El triángulo PRC es isósceles luego la bisectriz de C es la mediatriz de PR. El incentro I equidista de R y P

Como $PB=a-PC=a-\frac{b}{2}=\frac{2a-b}{2}=BQ$. El triángulo BPQ es isósceles por lo que la bisectriz de B es la mediatriz de PQ. El incentro I equidista de P y Q

De ambas condiciones; podemos afirmar que I es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo PQR

Con lo que queda demostrado que esta circunferencia y la circunferencia inscrita al triángulo ABC son concéntricas ya que su centro es I

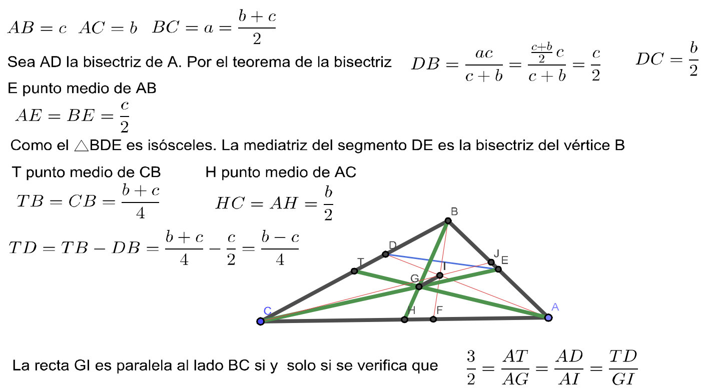
[1] $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

[2] $\begin{array}{l} S=s\cdot r \\ S=\frac{abc}{4R} \end{array}$ donde a,b,c son los lados del triángulo y s su semiperímetro

[3] En un triángulo ABC de lados $a=BC, b=AC, c=AB$ se verifica que $AI^2=\frac{bc(s-a)}{s}$ donde I es el incentro del triángulo

Lema Dado un triángulo ABC tal que $AB = c, AC = b$ y $BC = \frac{b+c}{2}$. Demostrar que la recta GI es paralela al lado BC donde G es el baricentro e I el incentro del triángulo ABC.
Siempre que un lado de un triángulo sea media aritmética de los otros dos; entonces la recta GI (G, I son el baricentro e incentro del triángulo) es siempre paralela a dicho lado

Demostración



Dado el triángulo ABC tal que $AB = c, AC = b$ y $BC = a = \frac{b+c}{2}$
Sea AD la bisectriz del vértice A. Por el teorema de la bisectriz

$$DB = \frac{ac}{c+b} = \frac{\frac{c+b}{2}c}{c+b} = \frac{c}{2}$$

Si E es el punto medio de AB

$$AE = EB = \frac{c}{2}$$

Por lo que; el $\triangle BDE$ es isósceles. La mediatriz del segmento DE es la bisectriz del vértice B
Sean T, H puntos medios de CB y AC respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} TB &= CB = \frac{b+c}{4} \text{ y } HC = AH = \frac{b}{2} \\ TD &= TB - DB = \frac{b+c}{4} - \frac{c}{2} = \frac{b-c}{4} \end{aligned}$$

El semiperímetro del $\triangle ABC$ es

$$s = \frac{3(b+c)}{4}$$

La bisectriz del vértice A es

$$AD = \frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}$$

La distancia de A al incentro I es

$$AI = \frac{\sqrt{bcs(s-a)}}{s}$$

Como

$$\frac{AD}{AI} = \frac{2s}{b+c} = \frac{\frac{6(b+c)}{4}}{b+c} = \frac{3}{2}$$

Al ser AT la mediana del vértice A y G el baricentro

$$\frac{3}{2} = \frac{AT}{AG}$$

Todo ello, nos permita afirmar que *los triángulos AIG y ADT son semejantes*. Al estar éstos en posición de thales; podemos afirmar que $GI \parallel TD \parallel BC$

Además $\frac{3}{2} = \frac{TD}{GI}$. Por lo que

$$GI = \frac{2}{3}TD = \frac{2}{3}TD = \frac{b-c}{6}$$

Juan José Isach Mayo . Profesor de Matemáticas (jubilado).
Valencia