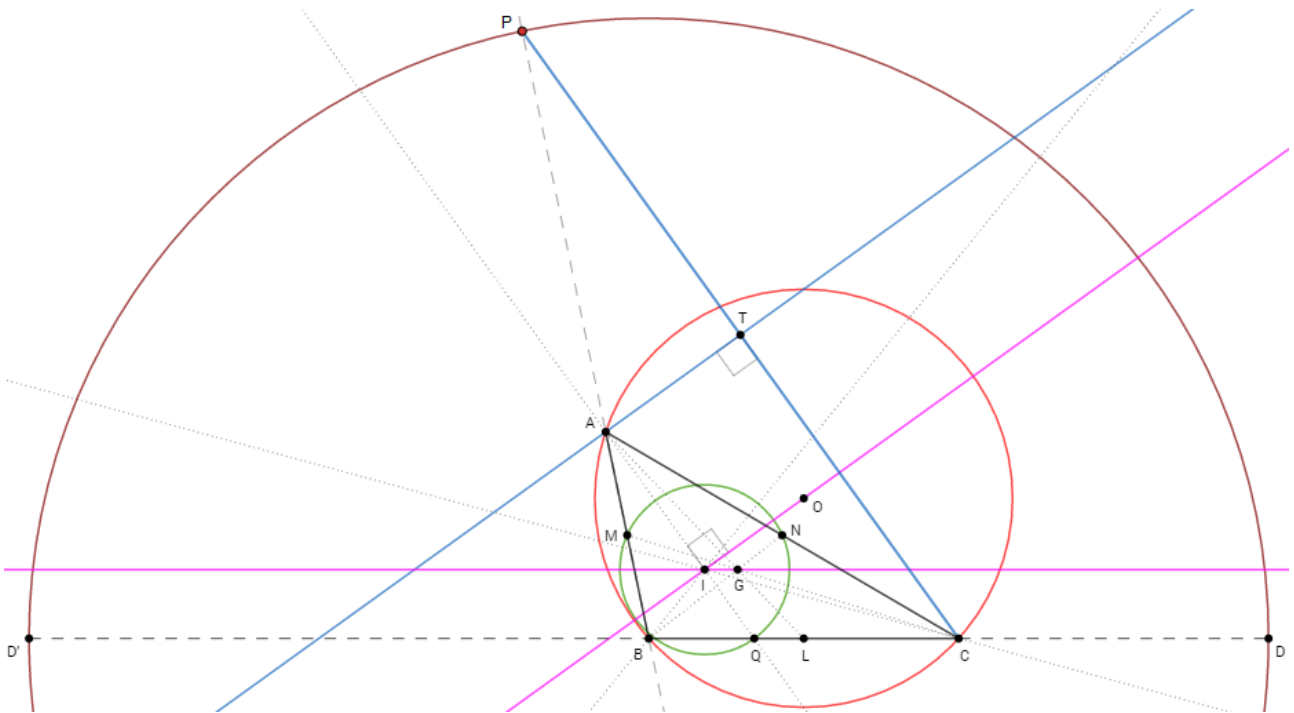


TRIÁNGULOS CABRI

Problema 915. (propuesto por Philippe Fondanaiche) Dado un segmento BD con punto medio C , se considera un punto P situado sobre la circunferencia de centro B y radio BD , de forma que la mediatriz del segmento CP corta a la recta BP en un punto A . Si G , I y O son el baricentro, el incentro y el circuncentro, respectivamente, del triángulo ABC , M y N son los puntos medios de los segmentos AB y AC , respectivamente, y Q es el punto de corte de la bisectriz AI con la recta BC , demostrar que:

- ① $GI \parallel BC$
- ② $OI \perp AI$
- ③ El centro de la circunferencia circuncrita al triángulo MQN coincide con el incentro I del triángulo ABC .



Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , como la ecuación de la circunferencia de centro B y radio BD es:

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz - [(c^2 - 4a^2)x - 4a^2y - 3a^2z](x + y + z) = 0$$

entonces, $P = (2a : c - 2a : 0)$, por lo que la ecuación de la recta mediatriz del segmento CP es:

$$c(2a + b - c)(2a - b - c)x + 3a^2cy + a[2(-a^2 + b^2 - c^2) + 5ac]z = 0$$

e, imponiendo que esta recta pase por el punto A , obtenemos que:

$$c(2a + b - c)(2a - b - c) = 0 \Rightarrow 2a - b - c = 0 \Rightarrow a = \frac{b+c}{2}$$

TRIÁNGULOS CABRI

① Como:

$$\begin{cases} G = (1 : 1 : 1) \\ I = (a : b : c) = (b + c : 2b : 2c) \end{cases} \Rightarrow GI \equiv 2x - y - z = 0$$

entonces, el punto del infinito de esta recta es:

$$GI_{\infty} = (0 : -3 : 3) = (0 : 1 : -1) = BC_{\infty}$$

por lo que $GI \parallel BC$.

② Como:

$$\begin{cases} O = (a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C) = (-(b+c)(3b^2 - 2bc + 3c^2) : 4b^2(3b - 5c) : 4c^2(3c - 5b)) \\ I = (b + c : 2b : 2c) \end{cases}$$

entonces:

$$OI \equiv 4bcx + c(b - 3c)y + b(c - 3b)z = 0$$

por lo que el punto del infinito de esta recta:

$$OI_{\infty} = (b - c : -b : c)$$

coincide con el punto del infinito de la bisectriz exterior del triángulo ABC correspondiente al vértice A y, por tanto, $OI \perp AI$.

③ Como:

$$\begin{cases} M = (1 : 1 : 0) \\ N = (1 : 0 : 1) \\ Q = (0 : b : c) \end{cases}$$

entonces, la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo MQN es:

$$-bcx^2 + c(b - 2c)y^2 + b(c - 2b)z^2 + 2c^2xy + 2b^2xz - (b^2 - 4bc + c^2)yz = 0$$

siendo su matriz asociada y la matriz adjunta de ésta:

$$\text{matriz} = \begin{pmatrix} -2bc & 2c^2 & 2b^2 \\ 2c^2 & 2c(b - 2c) & -(b^2 - 4bc + c^2) \\ 2b^2 & -(b^2 - 4bc + c^2) & 2b(c - 2b) \end{pmatrix}$$

$$\text{matriz adjunta} = \begin{pmatrix} -(b^2 - c^2)^2 & -2b(b + c)(b^2 - 5bc + 2c^2) & -2c(b + c)(2b^2 - 5bc + 2^2) \\ -2b(b + c)(b^2 - 5bc + 2c^2) & -4b^2(b - c)^2 & -2bc(b^2 - 6bc + c^2) \\ -2c(b + c)(2b^2 - 5bc + c^2) & -2bc(b^2 - 6bc + c^2) & -4c^2(b - c)^2 \end{pmatrix}$$

TRIÁNGULOS CABRI

por lo que su centro (punto conjugado de la recta del infinito) es:

$$\begin{pmatrix} -(b^2 - c^2)^2 & -2b(b+c)(b^2 - 5bc + 2c^2) & -2c(b+c)(2b^2 - 5bc + 2^2) \\ -2b(b+c)(b^2 - 5bc + 2c^2) & -4b^2(b-c)^2 & -2bc(b^2 - 6bc + c^2) \\ -2c(b+c)(2b^2 - 5bc + c^2) & -2bc(b^2 - 6bc + c^2) & -4c^2(b-c)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(b-3c)(c-3b)(b+c)^2 \\ -2(b-3c)(c-3b)(b+c)b \\ -2(b-3c)(c-3b)(b+c)c \end{pmatrix}$$

y, por tanto, su centro coincide con el incentro $I = (b + c : 2b : 2c)$ del triángulo ABC .