Problema 916

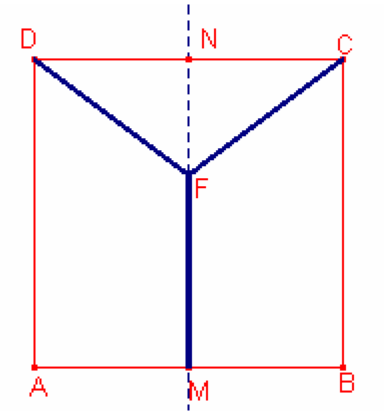
En un cuadrado ABCD, se considera un punto F equidistante del segmento $\overline{AB}$ y de los vértices C y D.

La razón del área del triángulo $\overset{\Delta}{FCD}$ y del cuadrado ABCD és:

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{3}{16}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{2}{9}$

Solución de Ricard Peiró i Estruch.

Sea $\overline{AB} = c$ el lado del cuadrado ABCD.



Sean los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente.

El punto F pertenece a la mediatriz MN del segmento $\overline{CD}$ y es interior al cuadrado.

Sea $\overline{DF} = \overline{CF} = \overline{FM} = x$.

$\overline{FN} = c - x$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{DNF}$:

$$\overline{FN} = \frac{\sqrt{4x^2 - c^2}}{2}$$

Entonces, $c - x = \frac{\sqrt{4x^2 - c^2}}{2}$.

Resolviendo la ecuación:

$$x = \frac{5}{8}c$$

$$\overline{FN} = c - x = \frac{3}{8}c.$$

El área del triángulo $\overset{\Delta}{FCD}$ es:

$$S_{FCD} = \frac{1}{2}c\cdot\frac{3}{8}c = \frac{3}{16}c^2.$$

La razón del área del triángulo $\overset{\Delta}{FCD}$ y del cuadrado ABCD es:

$$\frac{S_{FCD}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{3}{16}c^2}{c^2} = \frac{3}{16}.$$

La solución es B)