Problema 917 de *triánguloscabri*. *Dados una recta r y un punto P sean P' la proyección ortogonal de P sobre r y $f(P, \theta, r)$ el punto Q sobre r tal que $\angle QPP'$ es igual a un ángulo orientado θ.*

Sean ABC un triángulo y P un punto de su circunferencia circunscrita. Calculamos los puntos $U = f(P, \theta, BC)$, $V = f(P, \theta, CA)$, $W = f(P, \theta, AB)$. Sabemos que estos puntos están alineados (Simson) y que la envolvente de estas rectas al variar P es una deltoide (Steiner).

(A) *Tomando como referencia $w = 0$, ¿cómo varía la posición y el tamaño de esta deltoide al cambiar w?*

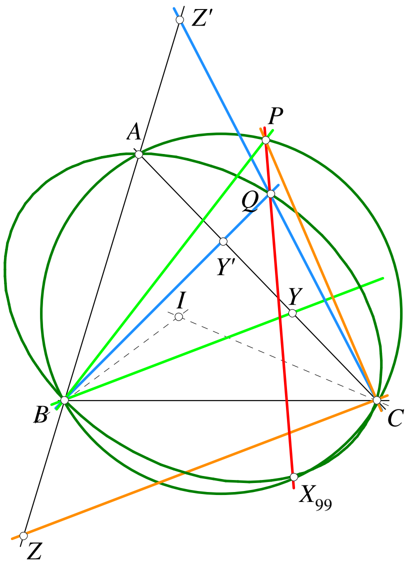
(B) *Fijamos ahora P y variamos w, obteniendo una infinidad de rectas para cada P, ¿Cuál es su envolvente?*

Propuesto por César Beade Franco.

Solución parcial de Francisco Javier García Capitán.

Solo damos solución al apartado B, ya que aunque con *Cabri* observamos que se obtiene una deltoide transformada seguramente por una semejanza de la deltoide de Steiner, no acertamos a ver cuál es exactamente esa transformación. De todas formas, incluimos la solución del apartado B.

En primer lugar, presentamos la relación entre la recta del infinito, la circunferencia circunscrita y la elipse circunscrita de Steiner: La circunferencia circunscrita es la conjugada isogonal de la recta del infinito, y la elipse circunscrita de Steiner es la conjugada isotómica de la recta del infinito.



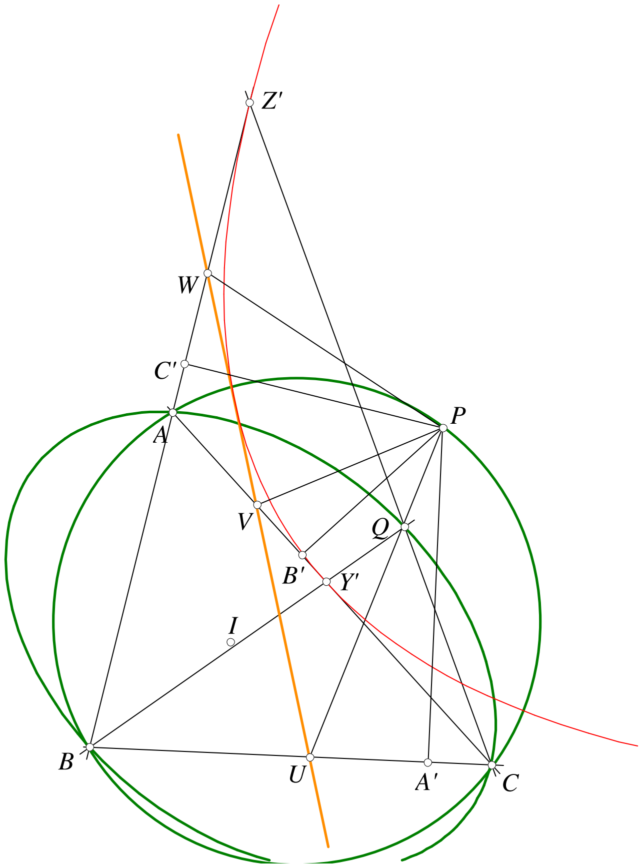
En esta figura vemos un punto P sobre la circunferencia circunscrita, de manera que su conjguado isogonal es un punto del infinto que se ve teniendo en cuenta que las rectas BY y CZ, isogonales respectivas de BP y CP, son paralelas.

Ahora, si Y', Z' son los puntos simétricos de Y, Z respecto de los puntos medios de CA y AB las rectas BY' y CZ' se cortan en un punto Q sobre la cónica circunscrita de Steiner, siendo Q por tanto el conjugado isotómico del conjugado isogonal de P.

Suponemos que la siguiente notable propiedad será conocida, dada su belleza y simplicidad: *La recta PQ siempre pasa por el punto de Steiner*

X_{99}, cuarto punto de intersección de la circunferencia circunscrita y la elipse circunscrita de Steiner.

Sean ahora P un punto sobre la circunferencia circunscrita y A', B', C' los pies de P sobre los lados BC, CA, AB, respectivamente. Sean U, V, W los puntos sobre las rectas BC, CA, AB, también respectivamente, tales que $\angle XPA' = \angle YPB' = \angle ZPC' = \theta$.



Usando coordendas baricéntricas, si P es conjugado isogonal del punto infinito $(u : v : w)$, es decir, se cumple $u + v + w = 0$, entonces la recta UVW tiene ecuación

$$(1) \qquad \sum_{\text{cíclica}} u\,(Sv + (S_C w - S_A u)\cot\theta)\,(Sw + (S_A u - S_B v)\cot\theta)\,x = 0.$$

Considerando θ variable, esta recta envuelve la cónica

$$(2) \qquad u^2x^2 + v^2y^2 + w^2z^2 - 2vwyz - 2wuzx - 2uvxy = 0,$$

que es la cónica inscrita al triángulo ABC con perspector $Q(vw : wu : uv)$, el conjugado isotómico de P, que estará como hemos visto antes sobre la elipse circunscrita de Steiner.

El discriminante de la cónica (2) es $-4uvw(u + v + w) = 0$, por lo que se trata de una parábola.