Pr. Cabri 918

Enunciado

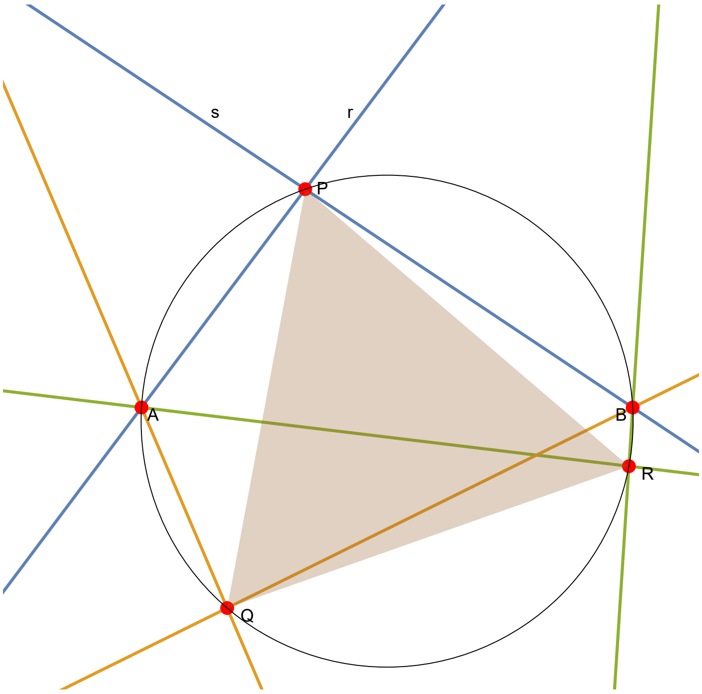
Teorema del faro.
Dos conjuntos de 3 rectas de distancia angular de 120º, cada uno de los cuales contienen a puntos fijos A, y B, intersecan en 3^2 puntos que son los vértices de 3 triángulos equiláteros. Sus circuncírculos contienen a A y B.

Guy, R. K. (2007), El teorema del faro. Morley and Malfatti. Un manojo de paradojas. The American Mathematical Monthly , Vol 114, No 2, Feb 2007.

Solución

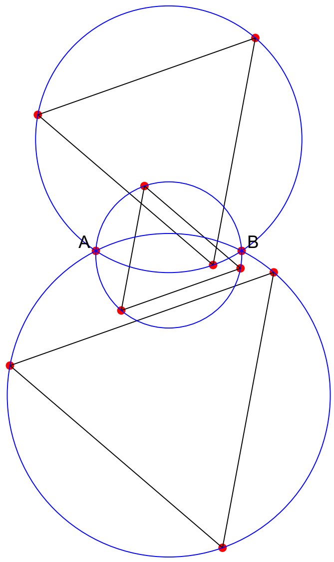
de César Beade Franco

Consideremos las rectas r por A y s por B.
Giramos r alrededor de A ángulos de 60º (o-120º) y -60º (o 120º) obteniendo las rectas r, rp y rn. Si hacemos lo propio con s alrededor de b obtenemos s, sp y sn. Éstas son las rectas del problema.
Intersecándolas en ese mismo orden determinan el triángulo PQR (dibujo).



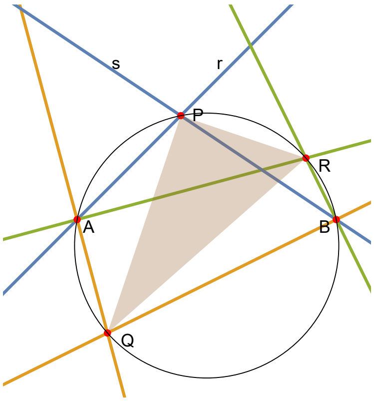
Comprobemos la conciclidad de A, B, P, Q y R.
Volvamos al dibujo. Consideremos el cuadrilátero APBR. El ángulo A mide 60º (un giro de r) y B mide 120º (dos giros de s). Así que este cuadrilátero es cíclico. Y lo mismo pasa con AQBP.
Ahora es fácil deducir que PQR es equilátero. Por ejemplo el ángulo QPR es igual al APR que mide 60º. Y así con los demás.
También se verifica que el ángulo AOB (O circuncentro) es doble que el que forman r y s (o su suplementerio).

Si rotamos cíclicamente (*) las rectas de A y las intersecamos con las de B (sin alterar) obtenemos otras dos ternas de puntos para las que valen los razonamientos anteriores: cada una determina un triángulo equilátero cuya circunferencia circunscrita pasa por A y B.



Se puede dar una "ligera" generalización de este resultado.
Consideremos las rectas r por A y s por B, con pendientes respectivas r y s respecto a la recta AB, donde podemos tomar A(-k, 0) y B(k,0).
Ahora las rectas r y s las giramos ángulos cuyas tangentes son t y -h (en vez de $\sqrt{3}$ y -$\sqrt{3}$, como antes).
Las pendientes son r, $\frac{r+t}{1-rt}$ y $\frac{r-h}{1+rh}$ para las rectas de A y s, $\frac{s+t}{1-st}$ y $\frac{s-h}{1+sh}$ para las de B.
Y sus puntos de intersección son
P($-\frac{k\,r+k\,s}{r-s}$, $-\frac{2\,k\,r\,s}{r-s}$), Q($\frac{k\,(-r-s-2\,t+2\,r\,s\,t+r\,t^2+s\,t^2)}{(r-s)\,(1+t^2)}$, $-\frac{2\,k\,(r+t)\,(s+t)}{(r-s)\,(1+t^2)}$) y R($\frac{k\,(2\,h-r+h^2\,r-s+h^2\,s-2\,h\,r\,s)}{(1+h^2)\,(r-s)}$, $-\frac{2\,k\,(h-r)\,(h-s)}{(1+h^2)\,(r-s)}$), vértices de un triángulo dos de cuyos ángulos tienen tangentes t y h.

La circunferencia circunscrita de PQR tiene centro O(0, $-\frac{k+k\,r\,s}{r-s}$) y radio $\sqrt{k^2+\frac{(k+k\,r\,s)^2}{(r-s)^2}}$, que solo depende de la posición de A, B, r y s, lo que ya sugiere que pasa siempre por A, B y P. De todas formas calculamos $|AO|=\sqrt{k^2+\frac{(k+k\,r\,s)^2}{(r-s)^2}}$ que sabemos es el radio.
Claro que podemos considerar los cuadriláteros APBQ y AQBR. Suponiendo que α (antihorario) y β (horario) son los ángulos girados, en el primero se observa que el ángulo A mide π-α y el B, α, mientras que en el otro A=π-(α+β) y B=α+β. Es decir cíclicos ambos.
Los otros 6 puntos no determinan más triángulos con estas características.



Los otros 6 puntos no determinan más triángulos con estas características.

(*) El haz se transforma en si mismo, solo se renombran sus rectas. Ésto no valdría para otros ángulos que no fueran múltiplos de 60º.