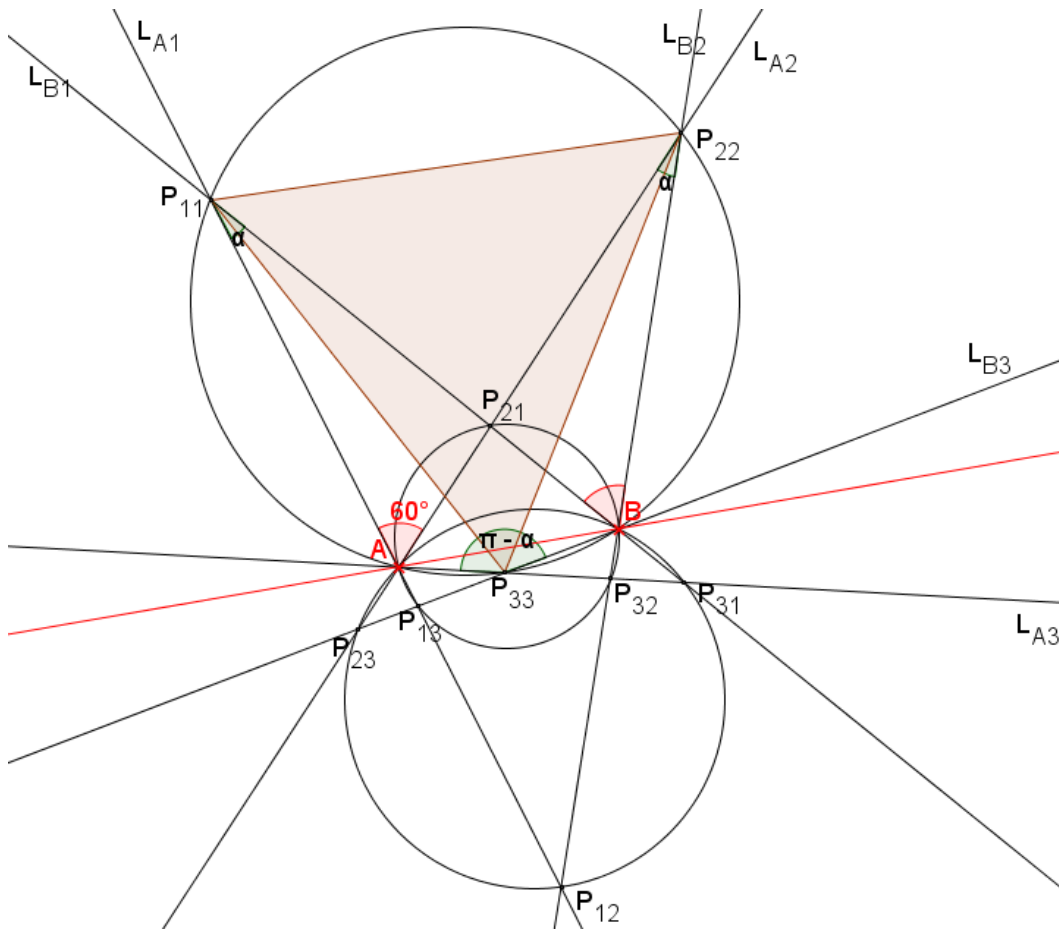


Problema 918

Teorema del faro. Dos conjuntos de 3 rectas de distancia angular de 120° , cada uno de los cuales contienen a puntos fijos A, y B, intersecan en 3^2 puntos que son los vértices de 3 triángulos equiláteros. Sus circuncírculos contienen a A y B.

Guy, R. K. (2007), El teorema del faro. Morley and Malfatti. Un manojo de paradojas. The American Mathematical Monthly, Vol 114, No 2, Feb 2007.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



On désigne par L_{A1}, L_{A2} et L_{A3} les trois droites qui passent par le point A et font entre elles des angles de $120^\circ = 2\pi/3$. De la même manière on désigne par L_{B1}, L_{B2} et L_{B3} les trois droites qui passent par le point B et font entre elles des angles de $120^\circ = 2\pi/3$.

On désigne par P_{ij} $i = 1$ à $3, j = 1$ à 3 , les neuf points qui sont à l'intersection des droites L_{Ai} et L_{Bj} .

Considérons les trois points P_{11}, P_{22} et P_{33} à l'intersection des droites L_{Ai} et L_{Bi} pour $i = 1, 2, 3$. Comme les droites L_{Ai} et L_{Bi} font par construction le même angle α modulo π , ces trois points sont sur un même cercle passant par A et B (voir figure ci-dessus).

Il en résulte que $\angle P_{11}P_{22}P_{33} = \angle P_{11}AP_{22} = \angle P_{11}BP_{22} = \pi/3$.

D'autre part $\angle P_{22}P_{11}P_{33} = \pi - \angle P_{22}BP_{33} = \pi - 2\pi/3 = \pi/3$. D'où $\angle P_{11}P_{33}P_{22} = \pi/3$.

Le triangle $P_{11}P_{22}P_{33}$ est donc équilatéral de même que les triangles $P_{12}P_{23}P_{31}$ et $P_{13}P_{21}P_{32}$. Ces deux triangles sont inscrits dans deux cercles passant eux aussi par les points A et B.

La droite AB est l'axe radical des trois cercles circonscrits aux triangles équilatéraux $P_{11}P_{22}P_{33}, P_{12}P_{23}P_{31}$ et $P_{13}P_{21}P_{32}$.