

Pr. Cabri 919

Enunciado

Sea ABC un triángulo con circuncentro en O y ortocentro H.

Sean A' , B' y C' las intersecciones de AH, BH y CH con BC, AC y AB.

Sean A1 , B1 y C1 las intersecciones de AO, BO y CO con BC, AC y AB.

Sean A'' , B'' y C'' los puntos medios de AA1 , BB1 y CC1.

Demostrar que A'A'' , B'B'' y C' C'' son concurrentes.

Berindeanu, M. (2019): Comunicación personal.

Solución

de César Beade Franco

Dicho punto es el circuncentro del triángulo A'B'C' (órtico) y del medial o el centro de la C9P.

Consideremos el triángulo A(a,b), B(0,0) y C(1,0), y F el centro ya citado.

Nos bastará comprobar que las rectas A'F y AA1 se cortan en M1, punto medio de AA1.

Con un poco de cálculo se obtiene que $F = (\frac{1}{4}(1+2a), \frac{a-a^2+b^2}{4b})$, $A' = (a, 0)$ y

$A1 = (\frac{(-1+a)(a^2+b^2)}{-a+a^2-b^2}, 0)$.

Y ahora $A'F \cap AA1 = (\frac{2a^2-2a^3+b^2}{2(a-a^2+b^2)}, \frac{b}{2}) = M1$.

Renombrando los vértices se deducen que $B'F \cap BB1 = M2$ y $BC'F \cap CC1 = M3$.

