Propuesto por Mihaela Berindeanu, profesora, Bucharest, Romania.

Problema 919

Sea ABC un triángulo con circuncentro en O y ortocentro H.

Sean A' , B' y C' las intersecciones de AH, BH y CH con BC, AC y AB.

Sean A1 , B1 y C1 las intersecciones de AO, BO y CO con BC, AC y AB.

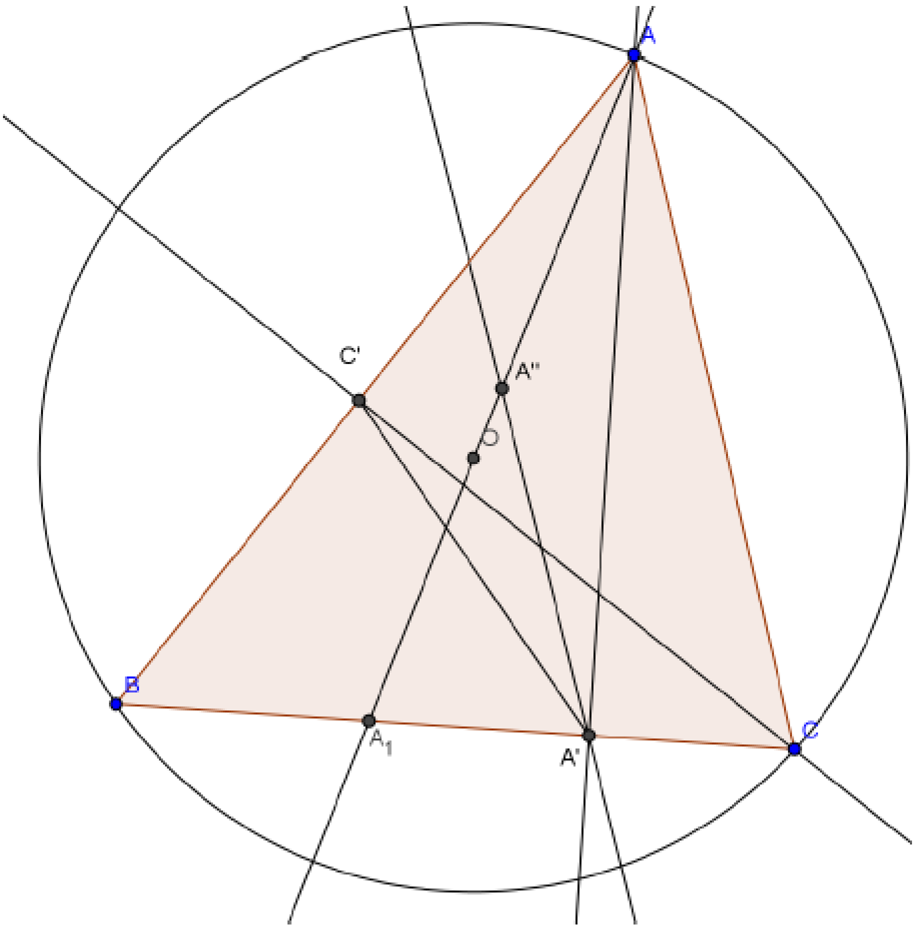
Sean A'' , B'' y C'' los puntos medios de AA1 , B B1 y CC1.

Demostrar que A'A'' , B'B'' y C' C'' son concurrentes.

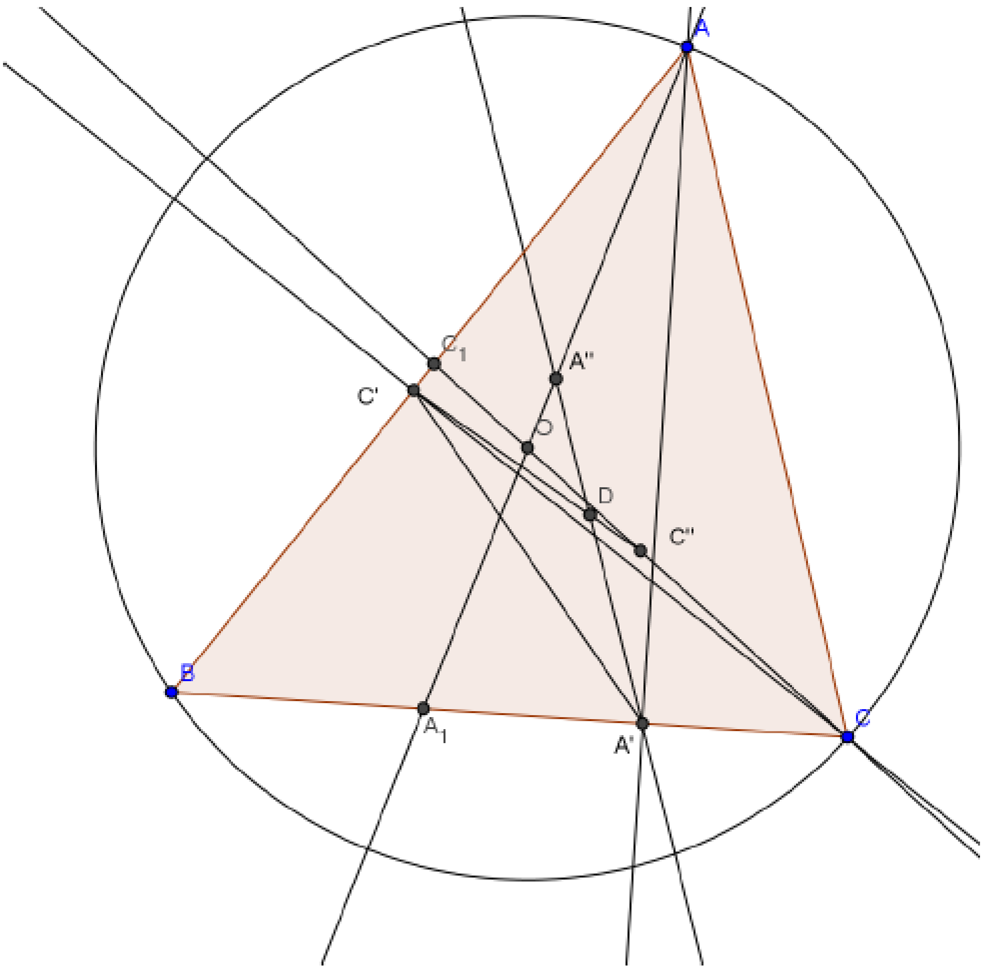
Berindeanu, M. (2019): Comunicación personal.

Solución del director

Sea, sin pérdida de generalidad , α<β<γ.



El triángulo A1A'A es rectángulo en A´y A´´ es su circuncentro.
Es: $\angle A''AA'=\angle OAC-\angle A'AC=(90º-\beta)-(90º-\gamma)=\gamma-\beta=\angle A''A'A$
Es $\angle BA'C'=\alpha$, Luego $\angle A''A'C'=<BA'A-\angle A''A'A-\angle C'A'B=90º-(\gamma-\beta)-\alpha=90º+\beta-\gamma-\alpha$



El triángulo $C_1C'C$ is rectángulo en C’, y C’’ es su circuncentro.
$\angle C''CC' = \angle C_1CB - \angle C'CB = (90^{\circ}-\alpha)-(90^{\circ}-\beta) = \beta-\alpha = \angle C''C'C$
Es $\angle BC'A' = \gamma$, luego $\angle C''C'A' = \angle C''C'C + \angle CC'A' = (\beta-\alpha)+(90^{\circ}-\gamma) = 90+\beta-\alpha-\gamma$
Por ello DA’=DC’.
Por razonamiento análogo, DB’=DA’.
Por lo que D is N, centro de la circunferencia de los nueve puntos.

Ricardo Barroso Campos. Sevilla. España.