

Problema 919 de triángulos cabri. Sea ABC un triángulo con circuncentro en O y ortocentro H .

Sean A', B' y C' las intersecciones de AH, BH y CH con BC, CA y AB .

Sean A_1, B_1 y C_1 las intersecciones de AO, BO y CO con BC, CA y AB .

Sean A'', B'' y C'' los puntos medios de AA_1, BB_1 y CC_1 .

Demostrar que $A'A'', B'B''$ y $C'C''$ son concurrentes.

Propuesto por Mihaela Berindeanu, profesora, Bucharest, Rumanía.

Solución de Francisco Javier García Capitán. Vamos a resolver una generalización del problema, sustituyendo H por un punto arbitrario y hallando el lugar geométrico al que debe pertenecer otro punto Q que cumpla la misma condición que O .

Problema general. Sean ABC un triángulo y P un punto con triángulo ceviano DEF . Si Q es otro punto con triángulo ceviano XYZ y llamamos X', Y', Z' a los puntos medios de AX, BY y CZ respectivamente, ¿cuál es el lugar geométrico de Q para que los triángulos DEF y $X'Y'Z'$ sean perspectivas?

Solución. Si $P = (u : v : w)$ y $Q = (x : y : z)$ obtenemos que Q describe la cónica $\Gamma(P)$

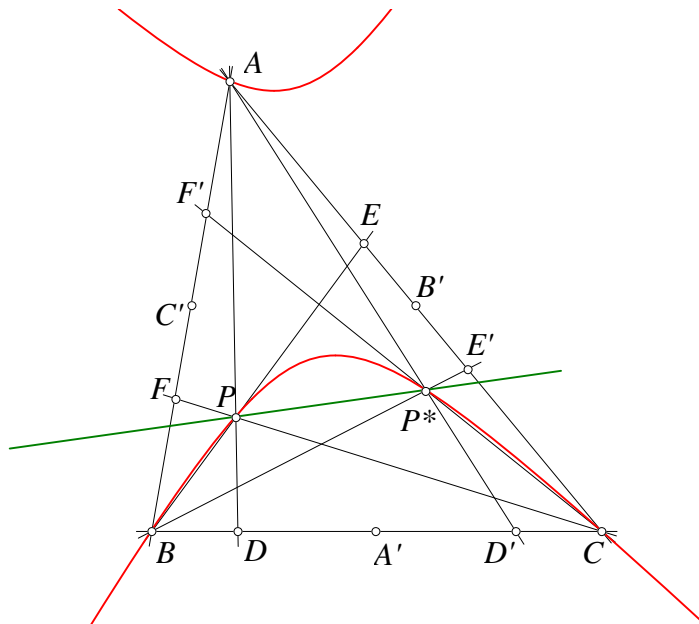
$$u(v^2 - w^2)yz + v(w^2 - u^2)zx + w(u^2 - v^2)xy = 0,$$

que es la cónica circunscrita al triángulo que pasa por P y el conjugado isotómico P^* de P .

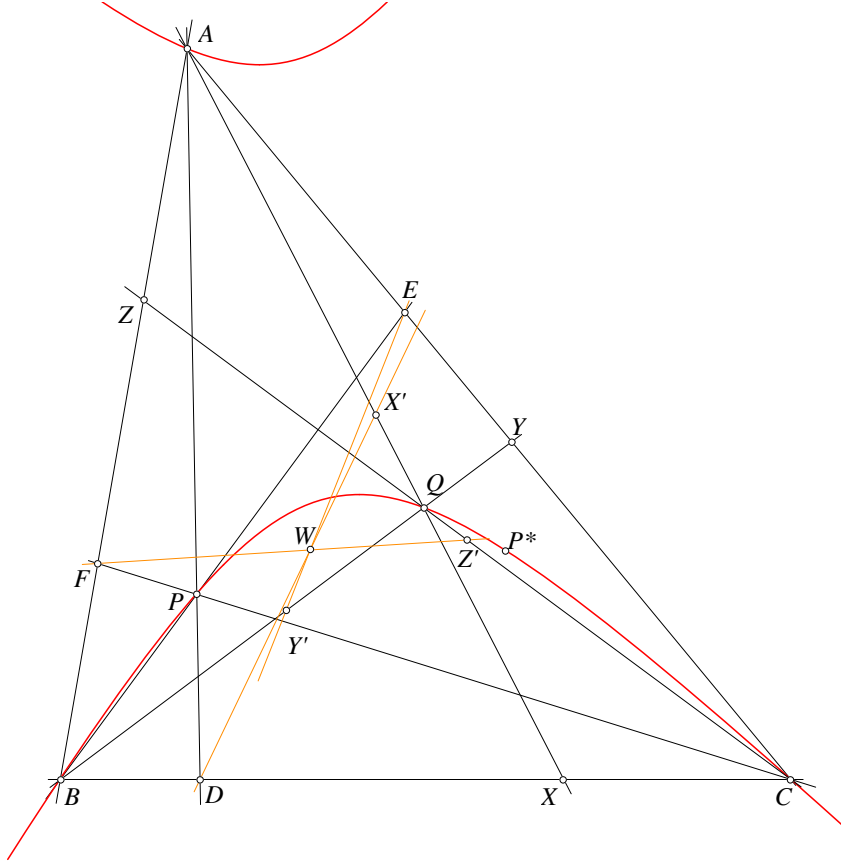
Recordemos que si A', B', C' son los puntos medios de BC, CA, AB y D', E', F' son los puntos simétricos de D, E, F respecto de A', B', C' entonces las rectas AD', BE', CF' concurren en el punto $P^* = (vw : wu : uv)$ llamado *conjugado isotómico* de P .

Observemos que la cónica $\Gamma(P)$ es la transformada isotómica de la recta PP^* , es decir el lugar geométrico de todos los conjugados isotómicos de los puntos de la recta PP^* .

La figura siguiente muestra la cónica $\Gamma(P)$, en este caso una hipérbola:



Esta otra figura muestra un punto Q sobre la cónica $\Gamma(P)$ y el punto S de concurrencia de las rectas DX' , EY' y FZ' :



El problema 919 afirma que cuando $P = H = (S_B S_C : S_C S_A : S_A S_B)$ entonces el circuncentro $O = (a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C)$ está sobre la cónica $\Gamma(H)$, es decir, que se cumple la identidad

$$(1) \quad \sum_{\text{cíclica}} \{S_B S_C (S_C^2 S_A^2 - S_A^2 S_B^2) (b^2 S_B) (c^2 S_C)\} = 0.$$

Ahora bien, (1) es equivalente a

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cíclica}} \{S_A^2 S_B^2 S_C^2 (b^2 c^2 (S_C^2 - S_B^2))\} &= S_A^2 S_B^2 S_C^2 \sum_{\text{cíclica}} \{b^2 c^2 (S_C^2 - S_B^2)\} \\ &= S_A^2 S_B^2 S_C^2 \sum_{\text{cíclica}} \{b^2 c^2 a^2 (S_C - S_B)\} = a^2 b^2 c^2 S_A^2 S_B^2 S_C^2 \sum_{\text{cíclica}} (S_C - S_B) = 0. \end{aligned}$$

Ahora nos preguntamos, ¿dónde está el punto de concurrencia?

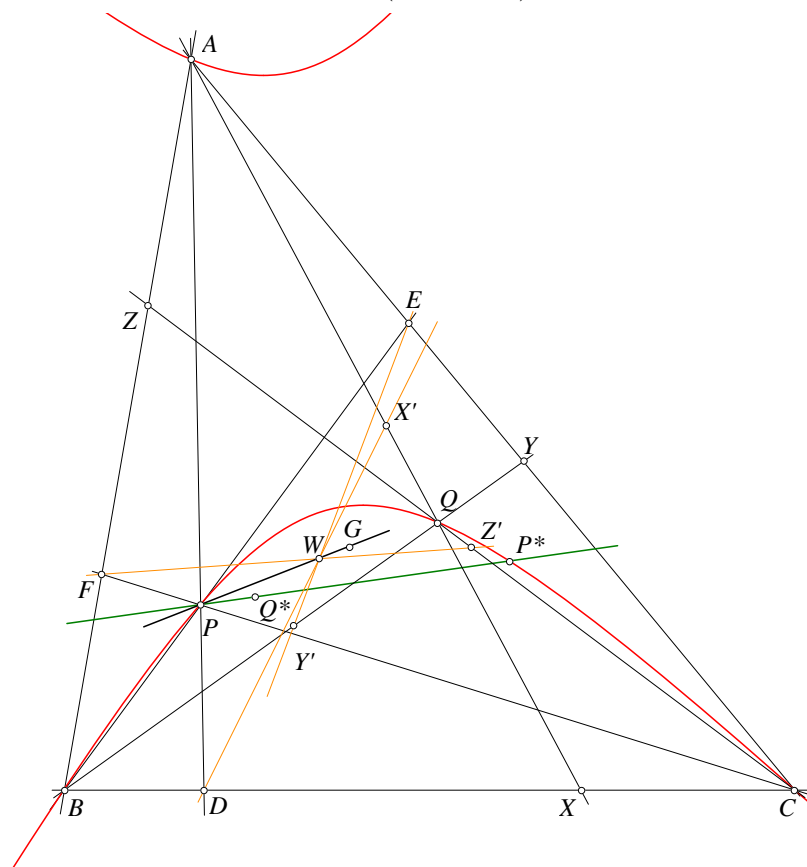
Problema 2. Si ABC es un triángulo, P un punto y Q varía sobre la cónica $\Gamma(P)$, ¿cual es el lugar del perspector W de los triángulos DEF y $X'Y'Z'$?

Solución. El punto W siempre está sobre la recta PG que une P y el baricentro G del triángulo ABC .

Además, hemos dicho que si Q está en la cónica $\Gamma(P)$, entonces podemos suponer que Q es el conjugado isotómico de un punto Q^* sobre la recta

PP^* . Pues bien, si Q^* divide al segmento PP^* en la razón $t : 1$, entonces se cumple

$$\frac{PW}{WG} = \frac{3(uv + uw + vw)}{t(u + v + w)^2}.$$



En particular, si $P = H$, el punto W estará sobre la recta de Euler, y resulta ser que W en este caso es exactamente el centro de la circunferencia de los nueve puntos.