

Problem 1 (Berindeanu, M. (2019): Comunicación personal.) Sea ABC un triángulo con circuncentro en O y ortocentro H .

Sean A', B' y C' las intersecciones de AH, BH y CH con BC, AC y AB .

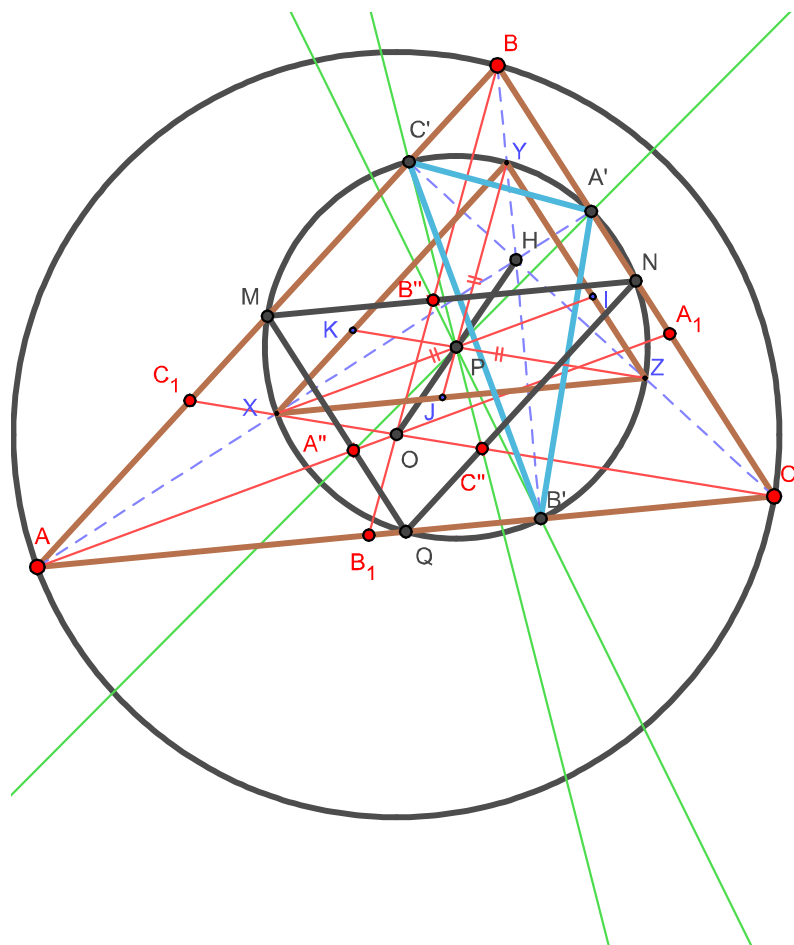
Sean A_1, B_1 y C_1 las intersecciones de AO, BO y CO con BC, AC y AB .

Sean A'', B'' y C'' los puntos medios de AA_1, BB_1 y CC_1 .

Demostrar que $A'A'', B'B''$ y $C'C''$ son concurrentes.

Solución:

Vamos a demostrar que dichas rectas son concurrentes en el punto, P , punto medio del segmento OH . Dicho punto es el centro de la circunferencia de los nueve puntos



La homotecia de centro H y radio 0.5 transforma la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$ en la circunferencia de los nueve puntos cuyo centro P es el punto medio de OH . Vamos a demostrar que dicho punto P es donde concurren las rectas $A'A'', B'B''$ y $C'C''$ son concurrentes

La homotecia de centro H (ortocentro) y radio 0.5 transforma la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$ en la circunferencia de los nueve puntos cuyo centro es P

El transformado mediante esta homotecia del O (circuncentro) es el punto P . Por lo que; P es punto medio del segmento OH

Al aplicar esta homotecia al $\triangle ABC$ obtenemos $\triangle XYZ$. En $\triangle XYZ$ el ortocentro es H y su circuncentro es el punto medio de OH (Punto P en el gráfico)

La circunferencia de los nueve puntos también pasa por los puntos A', B', C' . por lo que las rectas PA', PB' y PC' evidentemente concurren en P

Como los segmentos $\begin{bmatrix} AA_1 \\ BB_1 \\ CC_1 \end{bmatrix}$ concurren en O ; sus segmentos homotéticos $\begin{bmatrix} XI \\ YJ \\ ZK \end{bmatrix}$ concurren en P

Las rectas $\begin{bmatrix} XI \\ YJ \\ ZK \end{bmatrix}$ son las mediatrices de los lados $\begin{bmatrix} B'C' \\ A'C' \\ A'B' \end{bmatrix}$ del $\triangle A'B'C'$ y obviamente también concurren en el circuncentro de $\triangle A'B'C'$ que también es P

Si consideramos el $\triangle MNQ$ ¹ donde los puntos $\begin{bmatrix} M \\ N \\ Q \end{bmatrix}$ son los puntos medios de $\begin{bmatrix} AB \\ BC \\ AC \end{bmatrix}$ observamos que

$$\begin{aligned} A'' &= MQ \cap PA' \\ B'' &= MN \cap PB' \\ C'' &= NQ \cap PC' \end{aligned}$$

De lo que se concluye que las rectas $A'A''(PA'), B'B''(PB'), C'C''(PC')$ son concurrentes en P

¹ $\triangle MNQ$ triángulo medial del triángulo $\triangle ABC$