

Problema 919

Sea ABC un triángulo con circuncentro en O y ortocentro H.

Sean A' , B' y C' las intersecciones de AH, BH y CH con BC, AC y AB.

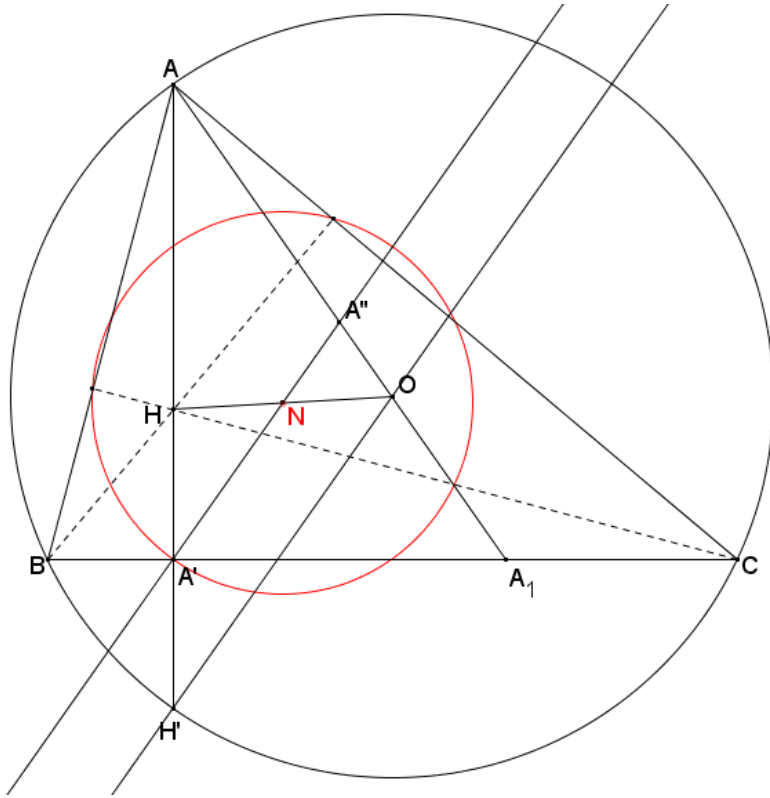
Sean A_1 , B_1 y C_1 las intersecciones de AO, BO y CO con BC, AC y AB.

Sean A'' , B'' y C'' los puntos medios de AA_1 , BB_1 y CC_1 .

Demostrar que $A'A''$, $B'B''$ y $C'C''$ son concurrentes.

Berindeanu, M. (2019): Comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Lemme : la droite $A'A''$ coupe le segment OH en son milieu N centre du cercle d'Euler du triangle ABC.

La droite AA' coupe le cercle circonscrit au triangle ANC au point H' .

Comme $\angle BHC = \angle BH'C = 180^\circ - \angle BAC$ et $\angle CBH = \angle CBH' = 90^\circ - \angle BCA$, les deux triangles BCH et BCH' sont isométriques. D'où $HA' = A'H'$. Par construction les deux triangles $AA'A''$ et $AH'O$ sont isocèles et $\angle AH'O = \angle AA'A'' = \angle A'AO$. Les droites OH' et $A'A''$ sont parallèles et $A'A''$ coupe HO en son milieu N.

De la même manière $B'B''$ et $C'C''$ coupent le segment OH en son milieu N.

Conclusion : les trois droites $A'A''$, $B'B''$ et $C'C''$ sont concurrentes au centre du cercle d'Euler du triangle ABC.