

Quincena del 1 al 15 de Octubre de 2019

Propuesto por Mihaela Berindeanu, profesora, Bucharest, Romania.

Problema 919.- Sea ABC un triángulo con circuncentro en O y ortocentro H .

Sean A', B' y C' las intersecciones de AH, BH y CH con BC, AC y AB .

Sean A_1, B_1 y C_1 las intersecciones de AO, BO y CO con BC, AC y AB .

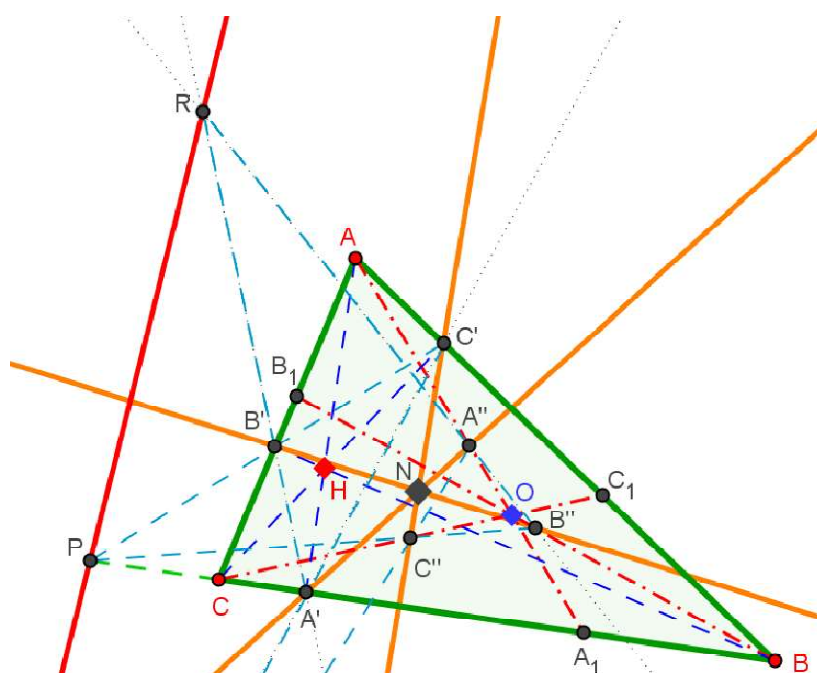
Sean A'', B'' y C'' los puntos medios de AA_1, BB_1 , y CC_1 .

Demostrar que $A'A'', B'B''$ y $C'C''$ son concurrentes.

Berindeanu, M. (2019): Comunicación personal.

Nota del editor, la profesora Berindeanu ha enviado este problema a la revista *Crux Mathematicorum*.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



1.- A simple vista se observa que las tres rectas del problema concurren en el centro N de la circunferencia de los nueve puntos.

Para poderlo demostrar tomamos coordenadas baricéntricas relativas al triángulo ABC . El circuncentro es $O = (u : v : w) = (a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C)$ y su conjugado ortogonal, el ortocentro $H = (S_B S_C : S_C S_A : S_A S_B)$, donde $S_A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}$ y expresiones análogas para S_B y S_C . Tenemos

$$a^2 S_A + b^2 S_B + c^2 S_C = 2(S_B S_C + S_C S_A + S_A S_B) = 2S^2, \text{ donde } S = 2\text{Área}[ABC].$$

De todo ello

$$N = O + 2H = (a^2 S_A + 2S_B S_C : b^2 S_B + 2S_C S_A : c^2 S_C + 2S_A S_B).$$

Vamos a obtener otra expresión, en este caso más adecuada, para las coordenadas de este punto.

Utilizando la identidad $a^2 S_A + b^2 S_B - c^2 S_C = 2S_A S_B$ y las similares permutando los vértices ponemos

$$N = (b^2 S_B + c^2 S_C : c^2 S_C + a^2 S_A : a^2 S_A + b^2 S_B) = (v + w : w + u : u + v)$$

La alineación de los puntos A', A'' y N se demostrará viendo que es nulo el determinante formado por sus coordenadas.

El pie de la altura desde A es $A' = (0: S_C S_A: S_A S_B) = \left(0: \frac{b^2}{v}: \frac{c^2}{w}\right)$; A_1 es la proyección del circuncentro sobre BC , por tanto $A_1 = (0: v: w)$ y con esto $A'' = (v+w)A + A_1 = (v+w: v: w)$.

$$\det(A', A'', N) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{b^2}{v} & \frac{c^2}{w} \\ v+w & v & w \\ v+w & w+u & u+v \end{vmatrix} = (v+w) \left[\frac{c^2}{w}(u-v+w) - \frac{b^2}{v}(u+v-w) \right] \quad (*)$$

$u-v+w = a^2 S_A - b^2 S_B + c^2 S_C = 2S_C S_A$; $u+v-w = a^2 S_A + b^2 S_B - c^2 S_C = 2S_A S_B$, con esto

$$\frac{c^2}{w}(u-v+w) - \frac{b^2}{v}(u+v-w) = \frac{2S_C S_A}{S_C} - \frac{2S_A S_B}{S_B} = 0, \text{ como pretendíamos.}$$

De forma similar demostraríamos que $B'B''$ y $C'C''$ también pasan por N .

2.- También *a ojo* se puede observar que las rectas $B'C'$, $B''C''$ y BC son concurrentes así como las rectas obtenidas permutando estos vértices. Este hecho bastaría por sí mismo para demostrar la concurrencia del párrafo anterior, pues, los pies de las alturas $B'C'$ se cortan con BC en el punto P que es el cuarto armónico de la terna (BCA') .

Esto hecho para cada par de pies, nos determina la recta que llamamos **polar de un punto respecto del triángulo** (en este caso, del H). Así la llama también por D. Pedro Puig Adam en su obra Geometría Métrica (vol 2, lección 7, párrafo 8, pág 122) aunque es habitualmente llamada *polar trilineal*, término que consideramos poco adecuado, pues trilineal no es tres veces lineal y parece más bien una acomodación al español del término en inglés.

Según el teorema de Desargues esto demostraría que los triángulos $A'B'C'$ y $A''B''C''$ son homológicos o perspectivos, siendo su eje de perspectiva o de homología la mencionada polar de H respecto de ABC y el centro de perspectiva el punto N .

Vayamos pues a probar la concurrencia de las rectas $B'C'$, $B''C''$ y BC . Sea $P = BC \cap B'C'$.

Sabemos que $(BCA'P) = -1$; como $A' = \frac{b^2}{v}B + \frac{c^2}{w}C$ entonces $P = \frac{b^2}{v}B - \frac{c^2}{w}C = \left(0: \frac{b^2}{v}: -\frac{c^2}{w}\right)$. La alineación de P con B'' y C'' se expresa con la anulación del siguiente determinante

$$\det[B''C''P] = \begin{vmatrix} u & u+w & w \\ u & v & u+v \\ 0 & \frac{b^2}{v} & -\frac{c^2}{w} \end{vmatrix} = u \left[\frac{c^2}{w}(u-v+w) - \frac{b^2}{v}(u+v-w) \right] = 0, \text{ como en } (*).$$

Y concluimos. ■