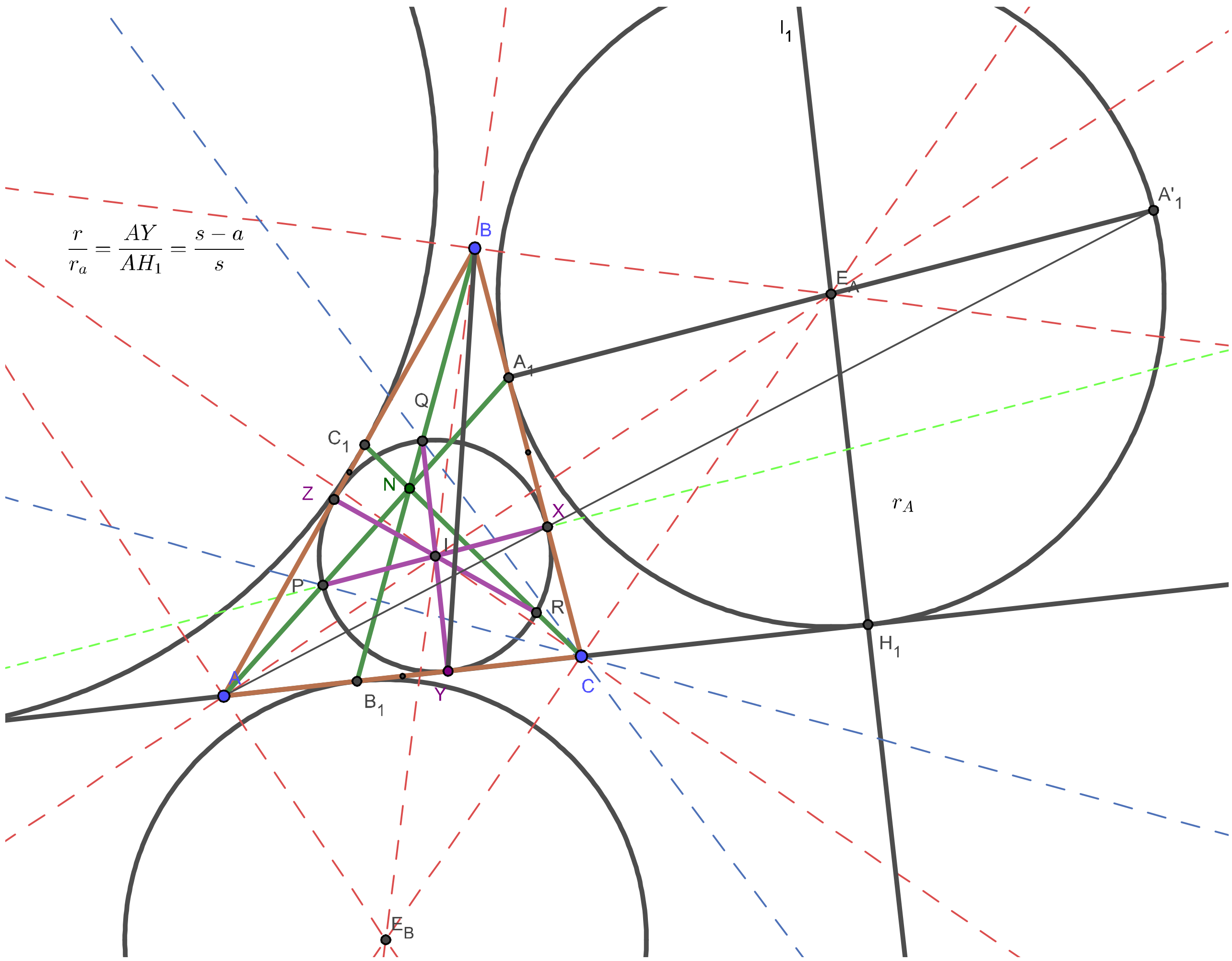
1. Punto de Nagel

Problema *(IV Olimpiada en honor de I.F. Sharygin 2008)* Dado un triángulo ABC. Uno de sus excírculos es tangente al lado BC en el punto $A1$, y a las extensiones de los otros dos lados. Otro excírculo es tangente al lado AC en el punto $B1$. Los segmentos AA_1 y BB_1 se cortan en el punto N.El punto P pertenece al segmento AA_1de manera que $AP = NA_1$. Probar que P pertenece al incírculo

Solución



Sean $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$ puntos de tangencia del íncirculo (I) del $\triangle ABC$ con los lados $\begin{bmatrix} BC \\ AC \\ AB \end{bmatrix}$ respectivamente.
Sabemos que si $s = \frac{a+b+c}{2}$ se verifica que

$$\begin{array}{rr} AY = s-a & YC = s-c \\ AZ = s-a & ZB = s-b \\ BX = s-b & XCB = s-c \end{array}$$

Consideramos el exincirculo asociado al vértice A (tangente exteriormente al lado BC en el punto A_1 y tangente a la prolongación de AC en el punto H_1) cuyo centro denominamos E_A

Como el punto medio del lado BC es el punto medio de XA_1sabemos que:

$$CA_1 = CH_1 = BX = s - b \qquad = A_1B = s - c$$
$$\text{Por lo que } AH_1 = s$$

La homotecia de centro A y radio $\frac{AY}{AH_1} = \frac{s-a}{s}$ aplicada al exincirculo del vértice A nos permite transformar éste en el incentro[1].

Sea ahora A_1' el punto de (E_A) tal que A_1A_1' es su diámetro. Evidentemente; mediante la homotecia anterior el segmento A_1A_1' se transformará en el diámetro $P'X$ de (I).Por lo que

$$AP' = \frac{s-a}{s} AA_1 \text{ y } P' \in (I) \text{ y } P' \ \in \ \text{recta } AA_1 \tag{1}$$

Sean $\begin{matrix}(E_A)\\(E_B)\\(E_c)\end{matrix}$ los exíncirculos asociados a cada vértice y sean $\begin{matrix}A_1\\B_1\\C_1\end{matrix}$ sus puntos de tangencia con los lados $\begin{matrix}BC\\AC\\AB\end{matrix}$ respectivamente. Como

$$\begin{aligned}CA_1 &= s-b & A_1B = s-c\\ B_1C &= s-a & AB_1 = s-c\\ C_1A &= s-b & BC_1 = s-a\end{aligned}$$

Y
$$\frac{AB_1}{B_1C}\frac{CA_1}{A_1B}\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{s-c}{s-a}\frac{s-b}{s-c}\frac{s-a}{s-b} = 1$$

Por el teorema de Ceva; podemos afirmar que las cevianas AA_1, BB_1 y CC_1 concurren en un punto N Dicho punto se denomina punto de Nagel

Vamos ahora a determinar la proporción entre $\frac{A_1N}{AA_1}$

Aplicando el teorema de Van Aubel a la ceviana AA_1

$$\begin{aligned}\frac{AN}{NA_1} &= \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{s-c}{s-a} + \frac{s-b}{s-a} = \frac{2s-c-b}{s-a} = \frac{a}{s-a}\\ &\Updownarrow\\ AN &= \frac{a}{s-a} NA_1\end{aligned}$$

Utilizando la relación anterior y el hecho de que $AN + NA_1 = AA_1$ obtenemos

$$\frac{a}{s-a} NA_1 + NA_1 = AA_1$$
$$\frac{s}{s-a} NA_1 = AA_1$$
$$NA_1 = \frac{s-a}{s} AA_1 \tag{2}$$

Sea ahora el punto P perteneciente al segmento AA_1de manera que $AP = NA_1$.

Por la relación (2)

$$AP = NA_1 = \frac{s-a}{s} AA_1 \text{ y } P \in \ \text{recta } AA_1 \tag{3}$$

Comparando esta relación (3) con la relación (1) anteriormente obtenida deducimos que ambos puntos P y P' coinciden

[1]Además $r = \frac{s-a}{s} r_A$ siendo r, r_A los radios de (I) e (E_A) respectivamente

Con lo que queda demostrado que P pertenece al incírculo (I). Además como PX es diámetro de (I) se verifica $PX = 2r$ siendo r el radio de (I)

Analogamente podríamos deducir que

a) Si Q es el simétrico de Y con respecto a I;entonces dicho punto Q verifica que es de (I) y $BQ = B_1N$

b) Si R es el simétrico de Z con respecto a I;entonces dicho punto R verifica que es de (I) y $CR = C_1N$

Juan José Isach Mayo. Profesor de Matemáticas (Jubilado)

Valencia