

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 920. (IV Olimpiáda en honor de I. F. Sharygin, 2008) Dado un triángulo ABC , uno de sus excírculos es tangente al lado BC en el punto A_1 y otro de sus excírculos es tangente al lado AC en el punto B_1 . Los segmentos AA_1 y BB_1 se cortan en el punto N y el punto P perteneciente al segmento AA_1 es tal que $AP = NA_1$. Probar que el punto P pertenece al incírculo del triángulo ABC .

Solución:

Como el punto N es el punto de Nagel del triángulo ABC , considerando coordenadas baricéntricas con respecto a dicho triángulo, resulta que:

$$\begin{cases} A_1 = (0 : a - b + c : a + b - c) \\ N = (-a + b + c : a - b + c : a + b - c) \end{cases}$$

por lo que el punto medio del segmento A_1N es $M = (2a : a - b + c : a + b - c)$ y, por tanto, el punto P (punto simétrico del punto N respecto del punto M) es:

$$P = (4a^2 : c^2 - (a - b)^2 : b^2 - (a - c)^2)$$

Finalmente, si $I = (a : b : c)$ es el incentro del triángulo ABC y r es su inradio, como:

$$\begin{aligned} IP^2 &= S_A \left(\frac{a}{a+b+c} - \frac{2a^2}{a+b+c} \right) + S_B \left(\frac{b}{a+b+c} - \frac{c^2 - (a-b)^2}{2(a+b+c)} \right) + S_C \left(\frac{c}{a+b+c} - \frac{b^2 - (a-c)^2}{2(a+b+c)} \right) \\ &= \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4(a+b+c)} = r^2 \end{aligned}$$

entonces, $IP = r$ y, por tanto, el punto P está situado sobre el incírculo del triángulo ABC .