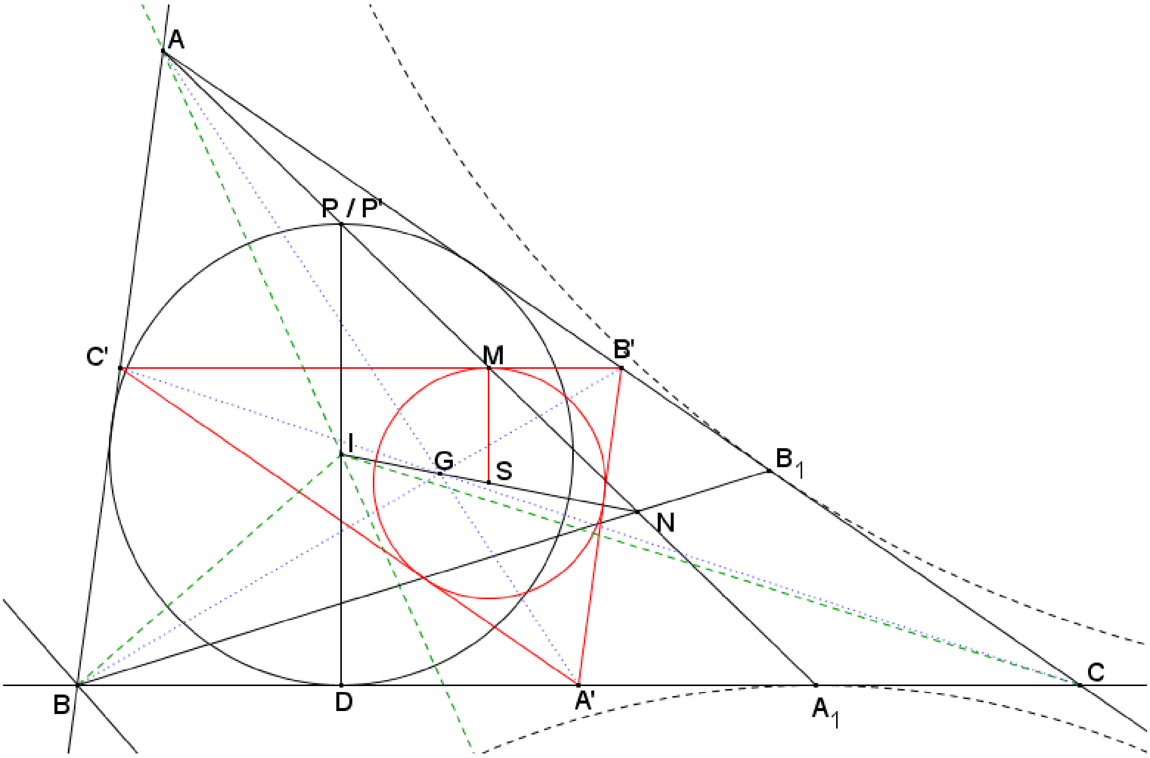
Problema 920

13.(9-10) Dado un triángulo ABC. Uno de sus excírculos es tangente al lado BC en el punto A_1, y a las extensiones de los otros dos lados. Otro excírculo es tangente al lado AC en el punto B_1. Los segmentos AA_1 y BB_1 se cortan en el punto N.El punto P pertenece al segmento AA_1de manera que $AP=NA_1$. Probar que P pertenece al incírculo.

[IV Olimpiada en honor de I. F. Sharygin](#) (2008). Rusia.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Les droites AA_1 et BB_1 se coupent au point N, appelé **point de Nagel** du triangle ABC.
On démontre que le point P appartient au cercle inscrit du triangle ABC en faisant appel à deux lemmes.

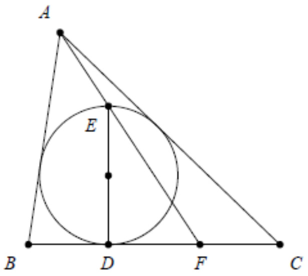
Lemme n°1 : le centre S du cercle inscrit au triangle médial du triangle ABC est aligné avec le centre I du cercle inscrit et le point de Nagel N et S est à mi-chemin entre I et N.

On désigne par A',B',C' les milieux des côtés BC,CA et AB. Le triangle A'B'C' est le triangle médial ou encore le cercle d'Euler du triangle ABC. Le cercle (γ) inscrit de ce cercle est appelé **cercle de Spieker** et a pour centre le point S appelé **point de Spieker** qui ont les propriétés suivantes
(voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Cercle_de_Spieker et Ross Honsberger - Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry pages 1 à 15)
Le centre I du cercle inscrit, le point de Nagel N et le centre de gravité G du triangle ABC sont alignés ainsi que le centre S du cercle (γ).
On a les relations bien connues 2IG = GN et IS = SN. Par ailleurs si r est le rayon du cercle inscrit du triangle ABC, le rayon du cercle (γ) est r/2 (même coefficient d'homothétie qui mesure les côtés du triangle A'B'C' rapportés aux côtés du triangle ABC)

Lemme n°2 : la cévienne ANA_1 passe par le point diamétralement opposé au point de contact du cercle inscrit du triangle ABC avec le côté BC.

On désigne par P' le point diamétralement opposé au point de contact D du cercle inscrit du triangle ABC avec le côté BC et par M la projection de S sur le côté B'C'.
Les points A,P',N et A_1 sont alignés (voir la démonstration correspondante en annexe page 2). Comme SM/IP' = NS/NI = 1/2 , M est milieu de P'N. Par construction M étant sur B'C' est milieu de AA_1.
On a donc $AP' = NA_1$ et les points P et P' sont confondus. C.q.f.d.

Annexe
Source : Yufei Zhao Lemmas in Euclidean Geometry



Let the incircle of triangle ABC touch side BC at D, and let DE be a diameter of the circle. If line AE meets BC at F, then $BD = CF$.

Proof. Consider the dilation with center A that carries the incircle to an excircle. The diameter DE of the incircle must be mapped to the diameter of the excircle that is perpendicular to BC. It follows that E must get mapped to the point of tangency between the excircle and BC. Since the image of E must lie on the line AE, it must be F. That is, the excircle is tangent to BC at F. Then, it follows easily that $BD = CF$. $\square$