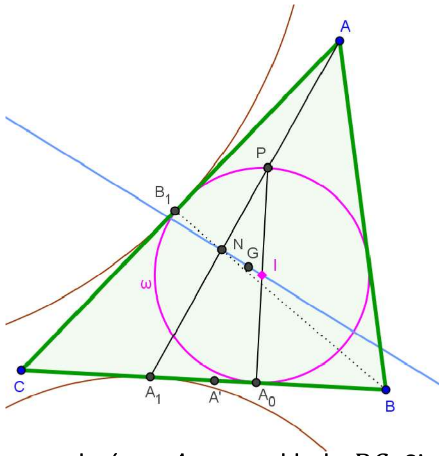
Quincena del 16 al 31 de Octubre de 2019

Propuesto por Mihaela Berindeanu, profesora, Bucharest, Romania.

***Problema* 920**.- *Dado un triángulo ABC. Uno de sus excírculos es tangente al lado BC en el punto A_1, y a las extensiones de los otros dos lados. Otro excírculo es tangente al lado AC en el punto B_1. Los segmentos AA_1 y BB_1se cortan en el punto N. El punto P pertenece al segmento AA_1 de manera que $AP = NA_1$. Probar que P pertenece al incírculo.*



IV Olimpiada en honor de I. F. Sharygin (2008). Rusia.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

N es el punto de Nagel del triángulo. La condición para determinar P se expresa vectorialmente así:

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{NA_1}$, o bien, usando los puntos

$$P = A + A_1 - N \qquad (1)$$

En la figura *vemos* que P es el punto opuesto diametralmente en la circunferencia inscrita al punto de contacto de ésta A_0, con el lado BC. Si suponemos que esto es así tenemos ahora

$$P + A_0 = 2I \qquad (2)$$

Llevando esta relación a (1) se tendría, si esta última es cierta

$$A + A_1 - N + A_0 = 2I \qquad (3)$$

Los puntos de tangencia sobre un mismo lado de la circunferencia inscrita y la excrita correspondiente son simétricos respecto del punto medio del lado, por tanto

$$A_1 + A_0 = 2A' = B + C \qquad (4)$$

Teniendo en cuenta que $A + B + C = 3G$, llevado a (3) nos daría por último

$$3G - N = 2I \qquad (5)$$

relación que se comprueba fácilmente, utilizando las coordenadas baricéntricas de estos puntos:

$$3G = (1,1,1); N = \frac{1}{s}(s-a, s-b, s-c); 2I = \left(\frac{a}{s}, \frac{b}{s}, \frac{c}{s}\right).$$

Observación final:- La expresión (5) se puede modificar poniendo $G - N = 2I - 2G$, o bien

$$\overrightarrow{NG} = 2\overrightarrow{GI} \qquad (6)$$

Esta relación, parecida a la de los puntos O, H y G en la recta de Euler, es un resultado clásico conocido. Expresa que el triángulo formado por las paralelas en los vértices de ABC al lado opuesto (a veces llamado antimedial o anticomplementario), homotético de ABC por una homotecia de centro G y razón -2, tiene como incentro el punto de Nagel de ABC. Se pueden encontrar demostraciones sintéticas de esta propiedad, por ejemplo en

http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/Nagel_punto.html.

Y con esto terminamos.■