

1. Propuesto por Mihaela Berindeanu, profesora, Bucharest, Romania.

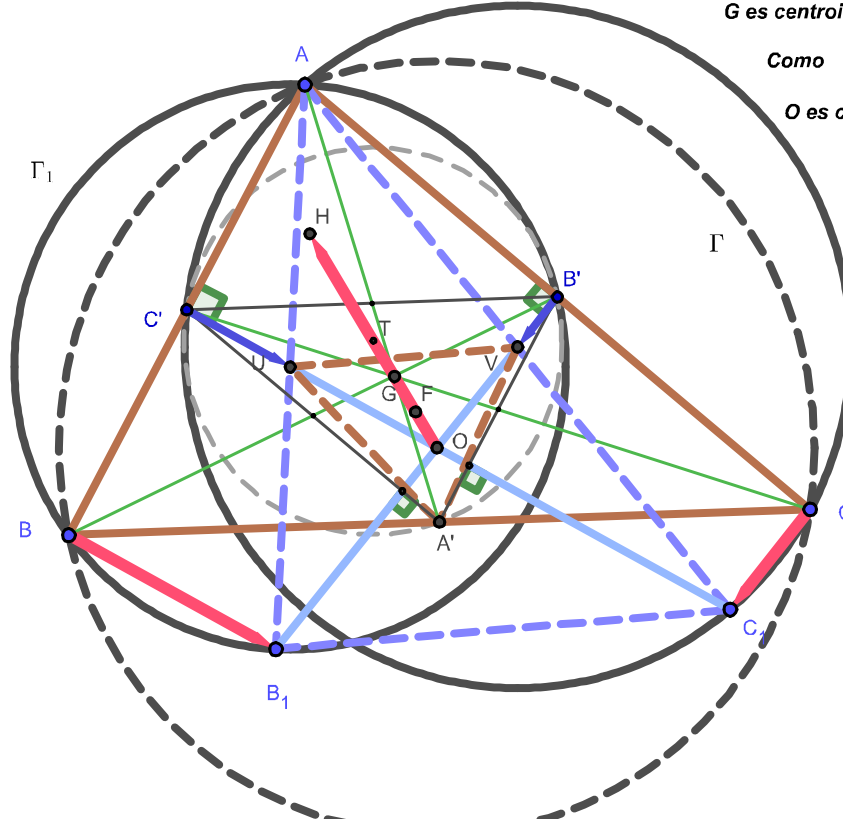
Problem 1 (921) Sea ABC un triángulo con ortocentro H , circuncírculo Γ y circuncentro O . Sean C' y B' los puntos medios de AB y AC respectivamente, y sean Γ_1 y Γ_2 los circuncírculos de ABB' y ACC' .

Sean B_1 y C_1 los puntos diametralmente opuestos de A en los círculos Γ_1 y Γ_2 .

Probar que vectorialmente $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{OH} = \vec{0}$

Berindeanu, Mihaela. (2019): Comunicación personal.

Solución



G es centroide del $\triangle ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Como $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$ tendremos $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$ (a)

O es centroide de $\triangle AB_1C_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \vec{0}$ (b)

Aislado de (a) y de (b) el vector $\overrightarrow{OA}$ e igualando

$$\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OC_1}$$

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{B_1O} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{C_1O} + \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{C_1C}$$

Además se verifica que

$$F \text{ es centroide de } \triangle A'UV \Leftrightarrow \overrightarrow{FA'} + \overrightarrow{FU} + \overrightarrow{FV} = \vec{0}$$

Si G el baricentro del $\triangle ABC$, A' punto medio de BC y sean U, V los centros de las circunferencias que pasan por ABB' y ACC'

Vamos a comprobar previamente que

$$a) \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$$

$$b) G \text{ es baricentro del } \triangle A'B'C' \text{ y } \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OH}$$

$$c) O \text{ es centroide del } \triangle AB_1C_1$$

a) Por ser G el baricentro del $\triangle ABC$ sabemos que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \quad (1)$$

Como $\left[\begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} \\ \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB} \\ \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC} \end{array} \right]$ entonces

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$$

Por la relación (1)

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} \quad (2)$$

H es el ortocentro del $\triangle ABC$.

$$\overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{OG} \iff \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2) tenemos

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} \text{ c.q.d} \quad (*)$$

b) Por ser $A', B'C'$ los puntos medios de los lados BC, AC, BC respectivamente

$$\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA} \quad \overrightarrow{GB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} \quad \overrightarrow{GC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$$

De lo que se deduce facilmente que

$$\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = 0 \iff G \text{ es baricentro del triángulo medial } \triangle A'B'C'$$

Además se puede deducir fácilmente

$$\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OH} \quad (1a)$$

El ortocentro del triángulo medial $\triangle A'B'C'$ es el circuncentro O del $\triangle ABC$.

El circuncentro, T , del triángulo medial $\triangle A'B'C'$ es el centro de la circunferencia de los nueve puntos del $\triangle ABC$

c) Veamos que O es centroide del $\triangle AB_1C_1$

Los puntos C_1UC están alineados así como los puntos $B'VB_1$ y además O es su punto común como se ve en el gráfico

Al ser O el ortocentro de $\triangle A'B'C'$ podemos afirmar que $C'U$ es mediatriz de AB y $B'V$ es mediatriz de AC

U es el punto medio de AB_1 y V es punto medio de AC_1 por lo que las rectas C_1U y B_1V son medianas del $\triangle AB_1C_1$.

Por lo tanto; O es el centroide del $\triangle AB_1C_1$ y se verifica

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{0} \quad (**)$$

Gracias a los apartados anteriores vamos a demostrar $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{C_1C}$

Aislado en (*) y (**) $\overrightarrow{OA}$ e igualando tendremos

$$\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OC_1}$$

$$\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{0} \text{ c.q.d}$$

Si nos fijamos en la construcción veremos que $\left[\begin{array}{l} \overrightarrow{BB_1} = 2\overrightarrow{C'U} \\ \overrightarrow{CC_1} = 2\overrightarrow{B'V} \end{array} \right]$ Luego

$$\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{0} \iff \frac{\overrightarrow{C'U} + \overrightarrow{B'V} + \frac{\overrightarrow{OH}}{2}}{2} = \overrightarrow{0} \quad (2a)$$

Vamos a comprobar además que F punto medio de OG es el centroide del $\triangle UVA'$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FA'} + \overrightarrow{FU} + \overrightarrow{FV} &= \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OV} - 3\overrightarrow{OF} \stackrel{1}{=} \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OV} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} \stackrel{2}{=} \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{B'O} + \overrightarrow{OV} + \overrightarrow{C'O} + \overrightarrow{OU} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{B'V} + \\ \overrightarrow{C'U} &\stackrel{3}{=} \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} = \vec{0}\end{aligned}$$

Luego F es centroide de $\triangle UVA'$

¹ Como $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OH}$

² Por (1a)

³ Por (2a)