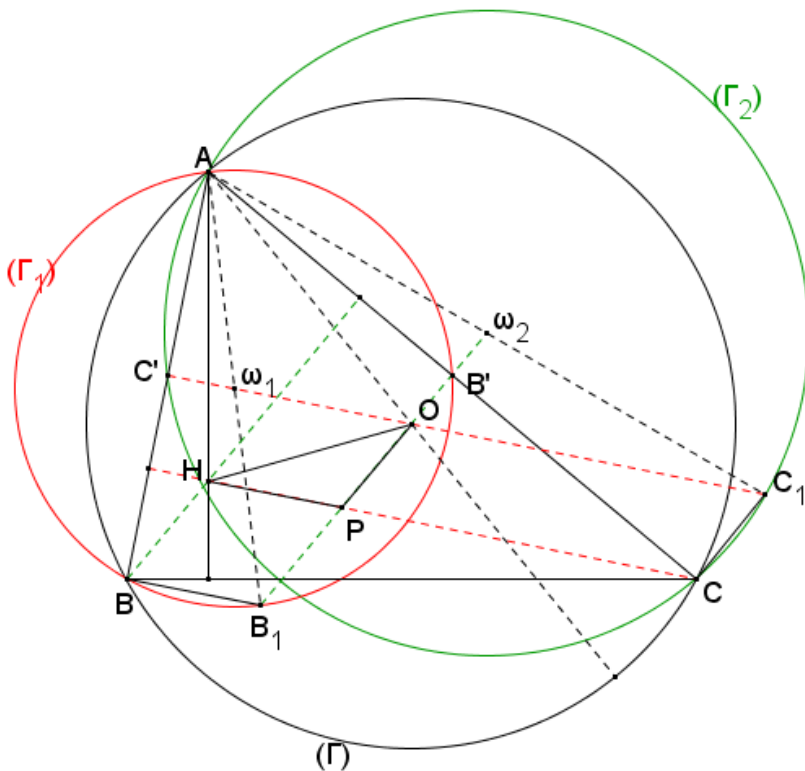


Problema 921

Sea ABC un triángulo con ortocentro H , circuncírculo Γ y circuncentro O . Sean C' y B' los puntos medios de AB y AC respectivamente, y sean Γ_1 y Γ_2 los circuncírculos de ABB' y ACC' . Sean B_1 y C_1 los puntos diametralmente opuestos de A en los círculos Γ_1 y Γ_2 . Probar que vectorialmente $BB_1 + CC_1 + OH = 0$

Berindeanu, M. (2019): Comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Lemme : les droites $[BH]$, $[OB_1]$ et $[CC_1]$ sont parallèles entre elles.

Par construction, H étant l'orthocentre du triangle ABC , la droite $[BH]$ est perpendiculaire au côté AC .

Le cercle (Γ_1) passant par les points A, B et B' et B_1 étant diamétralement opposé à A sur ce cercle, l'angle $\angle AB_1B'$ est droit. La droite $[B'B_1]$ est la médiatrice de AC et passe par le centre O du cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC . La droite $[OB_1]$ est donc perpendiculaire à AC .

Le point C_1 étant diamétralement opposé à A sur le cercle (Γ_2) , l'angle $\angle ACC_1$ est droit. La droite $[CC_1]$ est donc perpendiculaire à AC .

De la même manière les droites $[CH]$, $[OC_1]$ et $[BB_1]$ sont parallèles entre elles.

Soit P le point d'intersection des droites $[OB_1]$ et $[CH]$. Il en résulte que les quadrilatères BB_1PH et CC_1OP sont des parallélogrammes. D'où $BB_1 = HP$ et $CC_1 = PO$.

On en déduit l'égalité vectorielle $\mathbf{BB_1} + \mathbf{CC_1} + \mathbf{OH} = 0$. C.q.f.d.