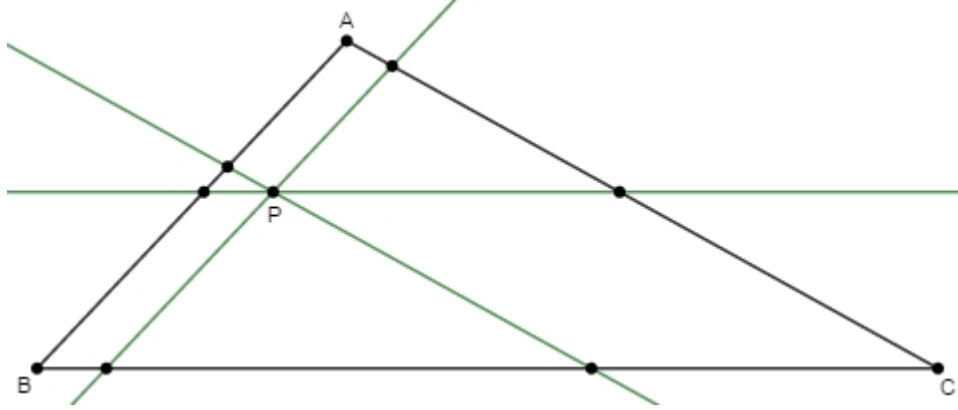


# TRIÁNGULOS CABRI

**Problema 922.** (Hyacinthos message 2229 (Paul Yiu, 29 de Mayo de 2001), propuesto por Mihaela Berindeanu) Punto  $X(192)$  de la ETC, punto de paralelas congruentes. Construir un punto  $P$  interior a un triángulo  $ABC$  de forma que las tres rectas paralelas a los lados trazadas por  $P$  construyan tres segmentos de igual longitud. Demostrar que tal longitud es:

$$\frac{2abc}{ab + bc + ca}$$



Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo  $ABC$ , si  $P = (u : v : w)$ , entonces, las ecuaciones de las tres rectas paralelas a los lados de dicho triángulo trazadas por  $P$  son:

$$\begin{cases} P_{ab} \equiv wx + wy - (u + v)z = 0 \\ P_{bc} \equiv (v + w)x - uy - uz = 0 \\ P_{ca} \equiv vx - (u + w)y + vz = 0 \end{cases}$$

por lo que los puntos de corte de estas tres rectas con los lados del triángulo (extremos de los segmentos que deben tener igual longitud) son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} U_{bc} = (0 : u + v : w) \\ U_{ca} = (u + v : 0 : w) \end{cases} \Rightarrow U_{bc}U_{ca}^2 = \frac{c^2(u + v)^2}{(u + v + w)^2} \Rightarrow U_{bc}U_{ca} = \frac{c(u + v)}{u + v + w} \\ \begin{cases} V_{ab} = (u : v + w : 0) \\ V_{ca} = (u : 0 : v + w) \end{cases} \Rightarrow V_{ab}V_{ca}^2 = \frac{a^2(v + w)^2}{(u + v + w)^2} \Rightarrow V_{ab}V_{ca} = \frac{a(v + w)}{u + v + w} \\ \begin{cases} W_{ab} = (u + w : v : 0) \\ W_{bc} = (0 : v : u + w) \end{cases} \Rightarrow W_{ab}W_{bc}^2 = \frac{b^2(u + w)^2}{(u + v + w)^2} \Rightarrow W_{ab}W_{bc} = \frac{b(u + w)}{u + v + w} \end{array} \right.$$

y, para que los tres segmentos tengan igual longitud, ha de ocurrir que:

$$c(u + v) = a(v + w) = b(u + w) \Rightarrow \begin{cases} u = \left( \frac{ab - bc + ca}{ab + bc - ca} \right)v \\ w = \left( \frac{-ab + bc + ca}{ab + bc - ca} \right)v \end{cases}$$

y, por tanto:

$$P = (ab - bc + ca : ab + bc - ca : -ab + bc + ca) = X(192)$$

**Miguel-Ángel Pérez García-Ortega**

## TRIÁNGULOS CABRI

Finalmente, la longitud común de los tres segmentos es:

$$U_{bc}U_{ca} = \frac{c(u+v)}{u+v+w} = \frac{c\left(\frac{ab-bc+ca}{ab+bc-ca} + 1\right)v}{\left(\frac{ab-bc+ca}{ab+bc-ca} + 1 + \frac{-ab+bc+ca}{ab+bc-ca}\right)v} = \frac{2abc}{ab+bc+ca}$$