

Problema 922

Punto X(192) de la ETC.

Punto de paralelas congruentes

Construir un punto P interior al triángulo ABC de manera que las tres paralelas a los lados construyan tres segmentos de la misma longitud.

Demostrar que tal longitud es $2abc/(ab+bc+ac)$.

Hyacinthos message 2929 (Paul Yiu, May 29, 2001),

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

On résout le problème en faisant appel aux coordonnées barycentriques des sommets du triangle ABC et du point P. Soient a, b, c les dimensions des côtés BC, CA et AB du triangle ABC.

On affecte au point P trois nombres réels (x, y, z) tels que $\mathbf{P} = x\mathbf{A} + y\mathbf{B} + z\mathbf{C}$ avec $x + y + z = 1$.

La parallèle au côté BC passant par P coupe les côtés AB et AC aux points U et V tels que le segment UV a pour longueur $(1 - x)a$. De la même manière la parallèle au côté CA passant par P coupe les côtés BC et BA aux points W et X tels que le segment WX a pour longueur $(1 - y)b$ et la parallèle au côté AB passant par P coupe les côtés CA et CB aux points Y et Z tels que le segment YZ a pour longueur $(1 - z)c$.

Il en résulte que les trois segments UV, WX et YZ sont égaux si et seulement si le triplet $(1 - x, 1 - y, 1 - z)$ est identique au triplet $(1/a, 1/b, 1/c)$. Or ce dernier triplet donne les coordonnées barycentriques homogènes du **point J (point X₇₅ de l'ETC) qui est le conjugué isotomique du centre I du cercle inscrit du triangle ABC**.

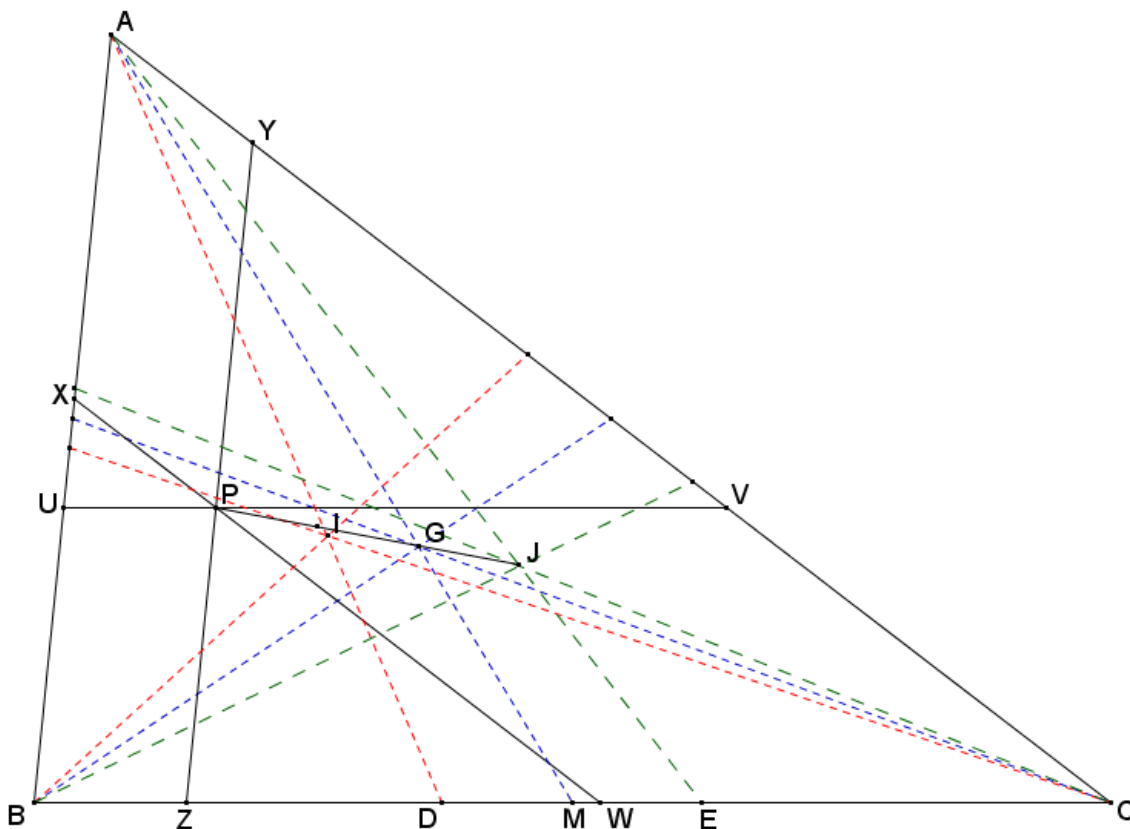
Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Conjugué_isotomique

Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

Les coordonnées barycentriques normalisées de J sont égales à $[(1 - x)A + (1 - y)B + (1 - z)C]/2 = (3G - P)/2$.

D'où $\mathbf{P} = 3\mathbf{G} - 2\mathbf{J}$ et la construction du point P découle de celle des points G et J avec les points P, G et J dans cet ordre et $PG = 2GJ$.

Construction du point P



On trace les points I et G respectivement centre du cercle inscrit et centre de gravité du triangle ABC. D étant le pied de la bissectrice issue de A sur le côté BC, on trace le point E symétrique de D par rapport à M. D'où la cévienne AE et les deux céviennes homologues issues de B et de C. Ces trois droites se rencontrent au point J qui est le conjugué isotomique de I. Les points J, G, P sont alignés dans cet ordre de sorte que $GP = 2GJ$. Il ne reste plus

qu'à tracer les parallèles UV, WX, YZ à BC, CA et AB passant par P. Le logiciel Geogebra permet de vérifier que les trois longueurs des segments UV, WX et YZ sont identiques.

Nota : il existe d'autres modes de construction du point P, par exemple à l'intersection des trois droites qui joignent les sommets du triangle A'B'C' anticomplémentaire du triangle ABC aux pieds des bissectrices issues de A, B, C sur les côtés du triangle ABC. Voir https://en.wikipedia.org/wiki/Equal_parallelians_point

Dimensions des segments de même longueur UV, WX et YZ

On pose $D = 1/a + 1/b + 1/c = abc/(ab + bc + ca)$. D'où les coordonnées barycentriques normalisées de J : $(1/aD, 1/bD, 1/cD)$ ou encore $(bc/(ab + bc + ca), ca/(ab + bc + ca), ab/(ab + bc + ca))$.

On obtient les coordonnées barycentriques normalisées de P à partir de la formule supra **$P = 3G - 2J$** .

Les coordonnées barycentriques normalisées de G sont égales à : $(1/3, 1/3, 1/3)$.

D'où celles de P : $[(ca + ab - bc)/(ab + bc + ca), (ab + bc - ca)/(ab + bc + ca), (bc + ca - ab)/(ab + bc + ca)]$

Les coordonnées barycentriques normalisées de U et V s'en déduisent :

U : $[(ca + ab - bc)/(ab + bc + ca), (ab + bc - ca)/(ab + bc + ca), 0]$

V : $[0, (ab + bc - ca)/(ab + bc + ca), (bc + ca - ab)/(ab + bc + ca)]$

D'où la dimension du segment $UV = BC * ((bc + ca - ab) - (ca + ab - bc)) / (ab + bc + ca)$ avec $BC = a$.
soit $UV = BC * 2bc / (ab + bc + c) = 2abc / (ab + bc + ca)$. C.q.f.d.