Quincena del 1 al 15 de Noviembre de 2019

***Problema* 922**.-

Punto $X(192)$ de la ETC.

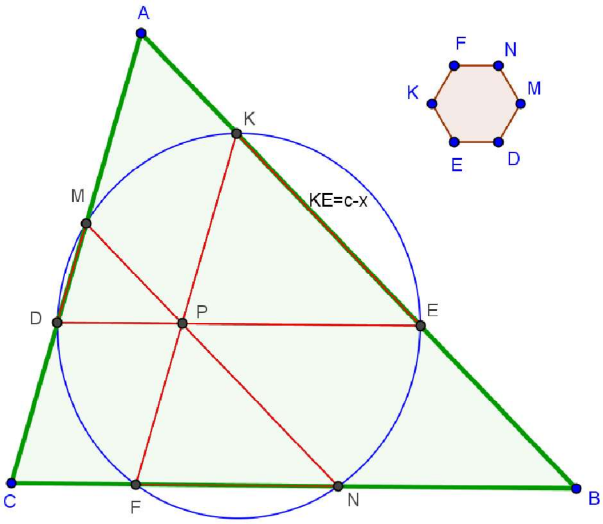
Punto de paralelas congruentes.

Construir un punto P interior al triángulo ABC de manera que las tres paralelas a los lados construyan tres segmentos de la misma longitud.

Demostrar que tal longitud es $\frac{2abc}{ab\quad bc+ac}$.

Hyacinthos message 2929 (Paul Yiu, May 29, 2001),X(192)ETC de Kimberling

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Llamemos x a la longitud del segmento que buscamos. Vamos a calcularla ahora.

Es fácil ver que $AK + EB = MP + PN = x$, luego $KE = c - x$ y análogamente con los otros dos segmentos. Así pues

$$x = AK + EB = AM + DC = CF + NB \quad (*) .$$

ADE es un triángulo semejante a ABC; la razón de semejanza es $\frac{x}{a}$, por tanto $AE = \frac{x}{a} \cdot c$; $KB = \frac{x}{b} \cdot c$;

Obsérvese que $AE + KB = AB + KE$, o sea,

$\frac{x}{a}c + \frac{x}{b}c = c + (c - x)$, o bien, $cx\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 2c - \frac{cx}{c}$;

operando $x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 2$; de donde

$$x = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{2abc}{ab + bc + ac}$$

que es lo que teníamos que demostrar.

Para concluir: los extremos de los tres segmentos están situados sobre una cónica sin más que aplicar el teorema de Pascal al hexágono $DEKFNM$. ■