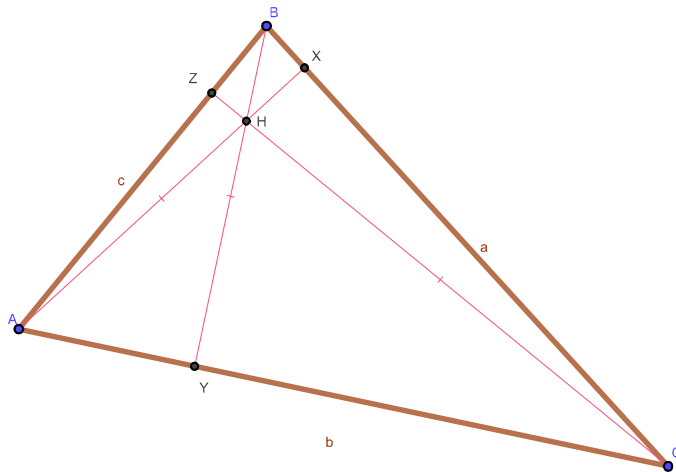


Problema 1 Dado el triángulo ABC y sea H su ortocentro. Si las alturas h_A, h_B, h_C son $h_A = AX, h_B = BY, h_C = CZ$ siendo $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$ las proyecciones ortogonales de los vértices $\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ sobre sus lados opuestos $\begin{bmatrix} BC \\ AC \\ AB \end{bmatrix}$. Calcula las longitudes de los segmentos

$$\begin{bmatrix} AZ & ZB \\ BX & XC \\ AY & YC \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} HZ & HC \\ HY & HB \\ HX & HA \end{bmatrix}$$

Solución

Utilizando la notación usual $AB = c, AC = b, BC = a$ y $s = \frac{a+b+c}{2}$



Vamos a calcular AZ y ZB

La altura del vértice C es

$$CZ = h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c} \quad (1)$$

Si $AZ = x$ entonces $BZ = c - x$. Aplicando el teorema de Stewart a la ceviana CZ

$$CZ^2 c = a^2 x + b^2 (c - x) - x(c - x)c^2$$

Por la relación (1)

$$\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c} = a^2 x + b^2 (c - x) - x(c - x)c^2$$

Reordenando obtenemos la ec de segundo grado

$$cx^2 + (a^2 - b^2 - c^2)x + b^2 c - \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c} = 0$$

Como la expresión $b^2 c - \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c}$ se puede reducir a $\frac{1}{4} \frac{(a^2 - b^2 - c^2)^2}{c}$

La ec de segundo grado anterior queda así

$$cx^2 + (a^2 - b^2 - c^2)x + \frac{1}{4} \frac{(a^2 - b^2 - c^2)^2}{c} = 0$$

Resolviéndola

$$x = \frac{1}{2c} (-a^2 + b^2 + c^2)$$

Por lo que

$$AZ = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} \text{ y } BZ = c - \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$$

Por permutación circular obtendremos

$$\begin{matrix} BX = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2b} & XC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \\ AY = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2b} & YC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} \end{matrix} \quad 1$$

Vamos ahora a determinar CH y HZ

Aplicando el teorema de Van Aubel a la ceviana CZ tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{CH}{HZ} &= \frac{CY}{YA} + \frac{CX}{XB} \\
\frac{CH}{HZ} &= \frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}}{\frac{-a^2+b^2+c^2}{2b}} + \frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}}{\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}} \\
\frac{CH}{HZ} &= \frac{2c^2(a^2+b^2-c^2)}{(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)} \\
CH &= \frac{2c^2(a^2+b^2-c^2)}{(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)} HZ
\end{aligned} \tag{2}$$

Como $CH + HZ = CZ$ por (2) y por (1)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2c^2(a^2+b^2-c^2)}{(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)} + 1 \right) HZ &= \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c} \\
\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)} HZ &= \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c} \\
\frac{16(s-b)s(s-a)(s-c)}{(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)} HZ &= \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c} \\
HZ &= \frac{(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{8c(s-b)s(s-a)(s-c)} \\
HZ &= \frac{(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)}{8c\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \frac{(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)}{8cS}
\end{aligned}$$

Por lo que

$$CH = \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{4S}$$

Analogamente podríamos demostrar que

$$\begin{aligned}
BH &= \frac{b(a^2-b^2+c^2)}{4S} & HY &= \frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{8bS} \\
AH &= \frac{a(-a^2+b^2+c^2)}{4S} & HX &= \frac{(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{8aS}
\end{aligned}$$

Problema 2 (Berindeanu, M. (2019): Comunicación personal.) Sea $\triangle ABC$ con círculo circunscrito Γ , circuncentro O y ortocentro H . Sea M el punto medio del arco más pequeño de BC sobre la circunferencia Γ .

La paralela por O a MB corta a AB en E , y la paralela por O a MC corta a AC en F . La mediatriz de EF corta al arco más pequeño de BC de Γ en P . Demostrar que $CP = CH$

Nota: En caso de triángulo rectángulo y obtusángulo, el arco es el opuesto al que contenga a A .

Solución

Vamos a demostrar que dicho punto P es el simétrico de H con respecto al lado BC . P es el simétrico de H con respecto a X (proyección ortogonal de A sobre el lado BC). Por lo que:

$$PX = HX$$

2ª Parte Vamos a calcular AP

Por la construcción de E y F resulta que su mediatriz pasa por el punto D y corta por segunda vez a Γ en el punto P^3

$$\begin{aligned} DE &= DF \\ PE &= PF \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \angle CAB$; entonces $\angle CAB = \angle FAE = \angle MOB$ al ser OM mediatriz del lado BC .

Como los puntos $EOFDA$ son concíclicos $\angle FAE = \angle FDE$ al abarcar el mismo arco sobre dicho círculo Ψ

Considerando el punto medio V del segmento BC y el triángulo OVB rectángulo en V^4

$$OV = OB \cos \alpha$$

Al ser $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2cb}$, $OB = R = \frac{abc}{4S}$

$$\begin{aligned} OV &= \frac{abc}{4S} \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2cb} = \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{8S} \\ BV &= \frac{a}{2} \end{aligned}$$

Como sabemos por el problema anterior que $BX = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$ tenemos que

$$XV = \frac{a}{2} - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} = \frac{b^2 - c^2}{2a}$$

Como los segmentos AP y DM son paralelos y MD es un diámetro de Γ se puede afirmar que los arcos MP y AD sobre Γ son iguales. Por lo que; sus cuerdas asociadas, los segmentos MP y AD , coinciden

Por ello; los puntos $DMPA$ forman un trapecio isósceles de altura $XV = \frac{b^2 - c^2}{2a}$ y bases $DM = 2R = \frac{abc}{2S}$ y AP . Con estos datos vamos a calcular AP

Sea T la proyección ortogonal del punto P sobre OM sabemos que $TP = XV = \frac{b^2 - c^2}{2a}$

Como el triángulo OPT es rectángulo en T y $OP = R = \frac{abc}{4S}$ entonces

$$\begin{aligned} OT^2 &= OP^2 - PT^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{16S^2} - \frac{(b^2 - c^2)^2}{4a^2} \\ OT^2 &= \frac{a^2 b^2 c^2}{(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)} - \frac{(b^2 - c^2)^2}{4a^2} \\ OT^2 &= \frac{1}{4} \frac{(a^2 b^2 + a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - b^4 - c^4)^2}{a^2 (a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)(-a + b + c)} \\ OT &= \frac{(a^2 b^2 + a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - b^4 - c^4)}{8aS} \\ \text{Luego } TM &= OM - OT = \frac{abc}{4S} - \frac{(a^2 b^2 + a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - b^4 - c^4)}{8aS} \end{aligned}$$

Como el segmento $AP = DM - 2TM$

$$AP = \frac{(a^2 b^2 + a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - b^4 - c^4)}{4aS}$$

Comparando AP con la expresión AH_1 en (3) vemos que

$$AH_1 = AP$$

Lo que nos permite afirmar que

$$P = H_1$$

³Los puntos P, A y E están alineados

⁴ $\angle MOB = \angle VOB$