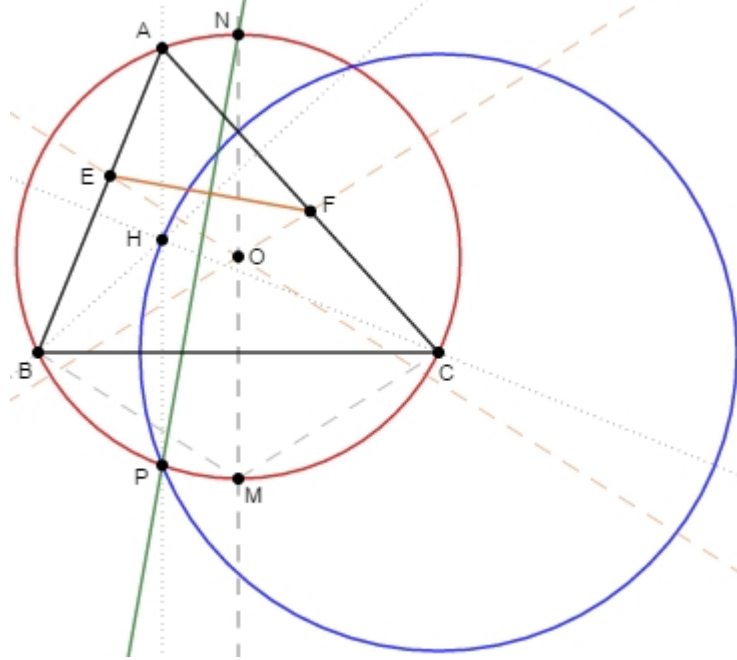


TRIÁNGULOS CABRI

Problema 923. (Mihaela Berindeanu, 2019) Dado un triángulo ABC con circuncentro O y ortocentro H , se considera el punto medio M del menor arco BC sobre la circunferencia circunscrita al triángulo. La recta paralela por O a MB corta a AB en el punto E y la recta paralela por O a MC corta a AC en el punto F . La mediatriz del segmento EF corta menor arco BC sobre la circunferencia circunscrita al triángulo en el punto P . Demostrar que $CP = CH$.



Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , como la ecuación de su circunferencia circunscrita es:

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy = 0$$

y la ecuación de la mediatriz del segmento BC es:

$$(b^2 - c^2)x + a^2y - a^2z = 0$$

entonces, los puntos medios de los arcos que determinan los puntos B y C sobre la circunferencia circunscrita al triángulo ABC son:

$$\begin{cases} M_1 = (-a^2 : b(b+c) : c(b+c)) \\ M_2 = (a^2 : b(c-b) : c(b-c)) \end{cases}$$

siendo $M = M_1$ cuando el triángulo ABC es acutángulo y $M = M_2$ cuando el triángulo ABC es rectángulo u obtusángulo. Tomando $M = M_1$ (en el otro caso se razonaría de forma totalmente análoga), resulta que:

$$\begin{cases} BM \equiv 0 = c(b+c)x + a^2z \\ CM \equiv 0 = c(b+c)x + a^2y \end{cases}$$

TRIÁNGULOS CABRI

y, como $O = (a^2(-a^2 + b^2 + c^2) : b^2(a^2 - b^2 + c^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2))$, entonces, las ecuaciones de las rectas paralelas a BM y CM pasando por O son:

$$\begin{cases} OE \equiv 0 = c[a^2c - (b-c)^2(b+c)]x - a^2bcy + a^2(a^2 - b^2 - c^2 + bc)z \\ OF \equiv 0 = b[a^2b - (b-c)^2(b+c)]x + a^2(a^2 - b^2 - c^2 + bc)y - a^2bcz \end{cases}$$

por lo que:

$$\begin{cases} E = (a^2b : a^2c - (b-c)^2(b+c) : 0) \\ F = (a^2c : 0 : a^2b - (b-c)^2(b+c)) \end{cases}$$

siendo la ecuación de la mediatriz del segmento EF :

$$(b-c)[(b^2 - c^2)^2 - a^2(b^2 + c^2)]x - a^2b(a^2 - b^2 + c^2)y + a^2c(a^2 + b^2 - c^2)z = 0$$

y su punto de corte con la circunferencia circunscrita al triángulo ABC :

$$P = (a^2(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) : -(a^2 + b^2 - c^2)(a^2(b^2 + c^2) - (b^2 - c^2)^2) : -(a^2 - b^2 + c^2)(a^2(b^2 + c^2) - (b^2 - c^2)^2))$$

Finalmente, si S es el doble del área del triángulo ABC , como:

$$\begin{cases} CP^2 = \frac{a^2(a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)(a + b + c)} = \frac{a^2S_C^2}{S^2} \\ CH^2 = \frac{a^2(a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)(a + b + c)} = \frac{a^2S_C^2}{S^2} \end{cases}$$

entonces:

$$CP = \frac{aS_C}{S} = CH$$