

Problema 923.-

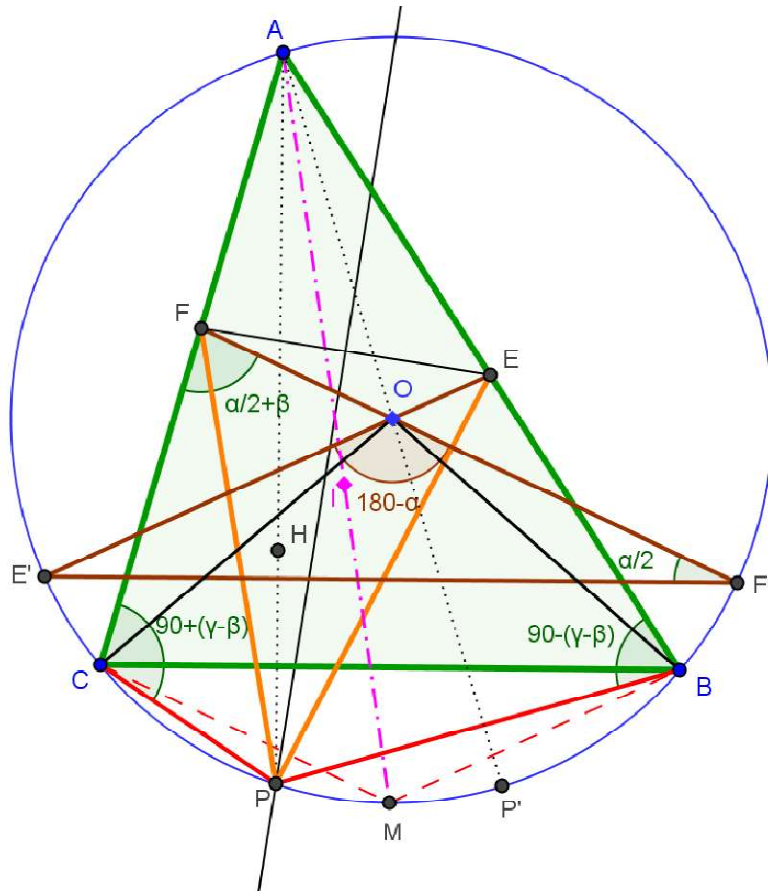
Sea ABC un triángulo con círculo circunscrito T , circuncentro O y ortocentro H . Sea M el punto medio del arco más pequeño de BC sobre la circunferencia T .

La paralela por O a MB corta a AB en E , y la paralela por O a MC corta a AC en F . La mediatriz de EF corta al arco más pequeño de BC de T en P . Demostrar que $CP = CH$.

(N. del director) En caso de triángulo rectángulo y obtusángulo, el arco es el opuesto al que contiene a A .

Berindeanu, M. (2019): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Vamos a demostrar que el simétrico de H respecto del lado BC (que está en la circunscrita) es el punto P que buscamos. Sean E', F' respectivamente, las proyecciones de E y F a través de O sobre la circunferencia circunscrita. El triángulo isósceles $E'OF'$ es semejante al también triángulo isósceles CMB y por ello el ángulo central en O mide $180 - \alpha$.

a) Los segmentos CF y BE son de igual longitud.

Midiendo ángulos, tenemos $\angle COB = 2\alpha$, $\angle E'OC = \angle BOF' = \frac{1}{2}[(180 - \alpha) - 2\alpha] = 90 - \frac{3\alpha}{2}$; por tanto el ángulo $\angle FOC = \alpha + (90 - \frac{3\alpha}{2}) = 90 - \frac{\alpha}{2}$ y $\angle FCO = 90 - \beta = \angle HCB$ por ser O y H conjugados ortogonales. Y con esto $\angle OFC = \frac{\alpha}{2} + \beta$. En el triángulo COF ya podemos calcular la longitud de CF :

$$CF = \frac{\sin\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)} \cdot OC = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)} \cdot R = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)} \cdot R = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta - \cos(\alpha + \beta)} \cdot R$$

$$= \frac{\sin \alpha}{\cos \beta + \cos \gamma} \cdot R$$

El triángulo BOE es isomorfo al COF , permutando los papeles de B y C ; β y γ .

La expresión obtenida para CF no varía al realizar esta permutación, luego $BE = CF = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta + \cos \gamma} \cdot R$.

b) Los segmentos PE y PF son de igual longitud.

Aplicamos el teorema del coseno a los triángulos FCP y EBP respectivamente.

Para simplificar llamaremos $w = CF = BE = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta + \cos \gamma} \cdot R$.

En el triángulo CBP tenemos $CP = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin(90 - \gamma) = 2R \cdot \cos \gamma$; análogamente $BP = 2R \cdot \cos \beta$.

En $\triangle CFP$

$$PF^2 = w^2 + CP^2 - 2w \cdot CP \cdot \cos(90 + (\gamma - \beta))$$

En $\triangle BEP$

$$PE^2 = w^2 + BP^2 - 2w \cdot BP \cdot \cos(90 - (\gamma - \beta))$$

La igualdad se dará si

$$4R^2 \cos^2 \gamma + 4R^2 \cdot \cos \gamma \sin(\gamma - \beta) \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \beta + \cos \gamma} = 4R^2 \cos^2 \beta - 4R^2 \cdot \cos \beta \sin(\gamma - \beta) \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \beta + \cos \gamma}$$

o bien, simplificando,

$$\cos^2 \gamma - \cos^2 \beta + \sin(\gamma - \beta) \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \beta + \cos \gamma} \cdot (\cos \gamma + \cos \beta) = 0$$

La relación $\cos^2 \gamma - \cos^2 \beta + \sin \alpha \cdot \sin(\gamma - \beta) = 0$ se obtiene descomponiendo la diferencia de cuadrados y usando después las identidades correspondientes:

$$\cos^2 \gamma - \cos^2 \beta = -4 \cdot \sin\left(\frac{\gamma + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\gamma + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\gamma - \beta}{2}\right) = -\sin(\gamma + \beta) \cdot \sin(\gamma - \beta)$$

$$\sin(\gamma - \beta) = -\sin \alpha \cdot \sin(\gamma - \beta).$$

Y con esto se concluye.

■