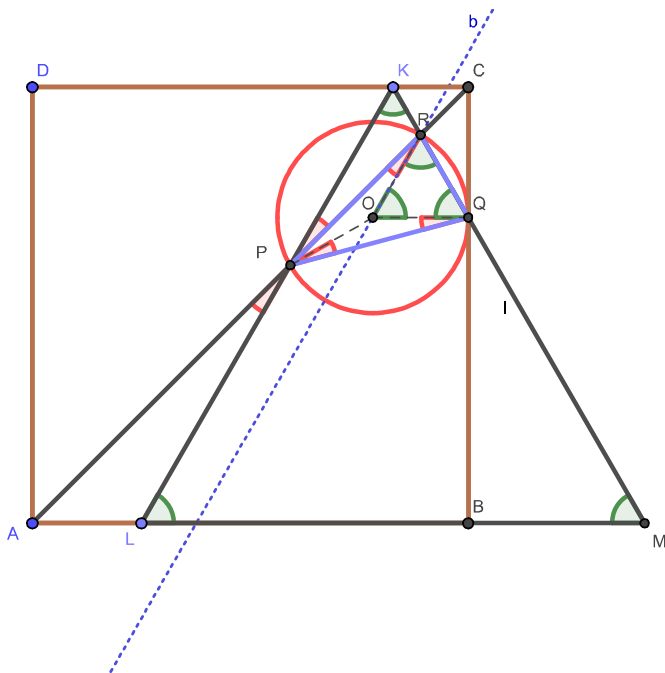


Problema Sea ABCD un cuadrado, K un punto sobre [CD]. Sean M y L dos puntos sobre la recta AB tal que KLM sea un triángulo equilátero. Sean P la intersección de (LK) con (AC) y Q la intersección de (MK) y (BC), R la intersección de (PC) y (QK). Sea Γ la circunferencia circunscrita al triángulo PQR.

Demostrar que Γ es tangente a (BC) en Q

Aymé, J. L. (2019): Comunicación personal.

Solución



En el $\triangle CRK$ vemos que: $\widehat{RKC} = 60^\circ$, $\widehat{KCR} = 45^\circ$ y $\widehat{CRK} = 75^\circ$

Como $\triangle ARM \sim \triangle CRK$

$$\widehat{RMA} = 60^\circ, \widehat{MAR} = 45^\circ \text{ y } \widehat{ARM} = 75^\circ$$

En $\triangle LAP$ vemos que $\widehat{LAP} = 45^\circ$, $\widehat{PLA} = 120^\circ$ y $\widehat{APL} = 15^\circ$

Como $\triangle LAP \sim \triangle CPK$

$$\widehat{CPK} = 15^\circ, \widehat{PKC} = 120^\circ \text{ y } \widehat{KCP} = 75^\circ$$

Sea O el circuncentro del triángulo PQR

Trazando desde el punto R una paralela al lado KL y desde Q una paralela al lado LM obtenemos también el punto O . El $\triangle ROQ$ es equilátero al ser semejante al $\triangle LKM$ y además

$$\widehat{PRO} = \widehat{RPK} = 15^\circ$$

El ángulo $\widehat{QPR}$ por ser ángulo inscrito en (O) verifica que $\widehat{QPR} = \frac{\widehat{QOR}}{2} = 30^\circ$

De todo lo anterior; deducimos que $\widehat{RQP} = 75^\circ$ y como $\widehat{RQO} = 60^\circ$ podemos afirmar que $\widehat{OQP} = 15^\circ$

El triángulo PQR es isósceles siendo $PQ = PR$. La recta OP es mediatriz del segmento QR y bisectriz del vértice P del $\triangle PQR$

Es evidente que la circunferencia circunscrita (O) del $\triangle PQR$ es tangente al segmento CD en el punto Q ya que el segmento OQ es $\perp$ a BC