Problema 924

Sea ABCD un cuadrado, K un punto sobre [CD].

Sean M y L dos puntos sobre la recta AB tal que KLM sea un triángulo equilátero.

Sean P la intersección de (LK) con (AC) y Q la intersección de (MK) y (BC), R la intersección de (PC) y (QK).

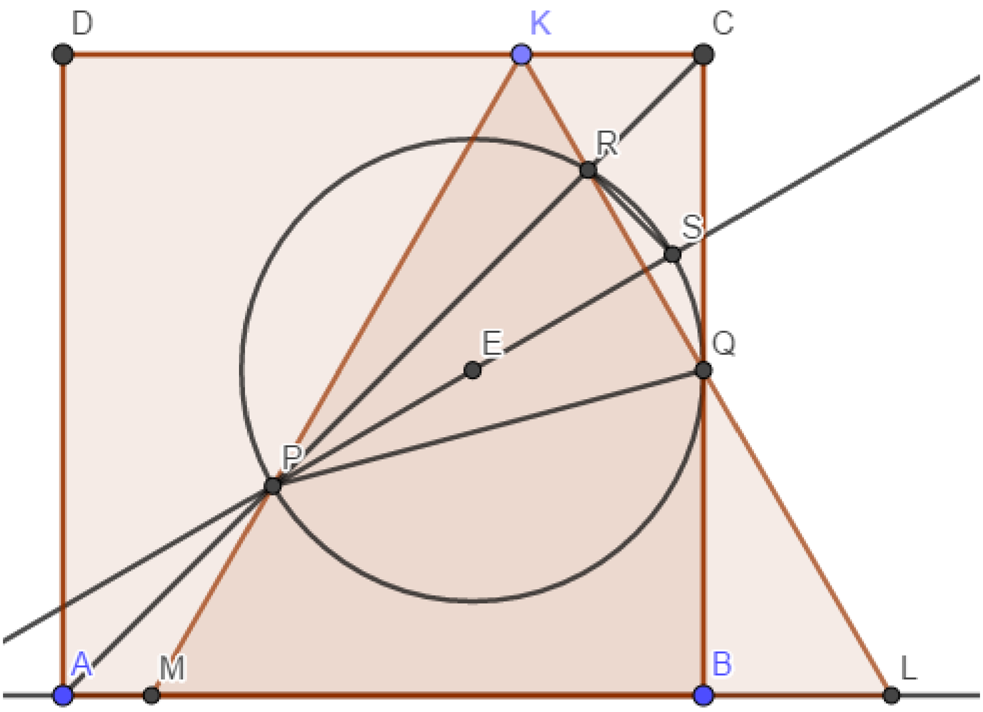
Sea *1* la circunferencia circunscrita al triángulo PQR.

Demostrar que *1* es tangente a (BC) en Q.

Aymé, J. L. (2019): Comunicación personal.

Solución del director

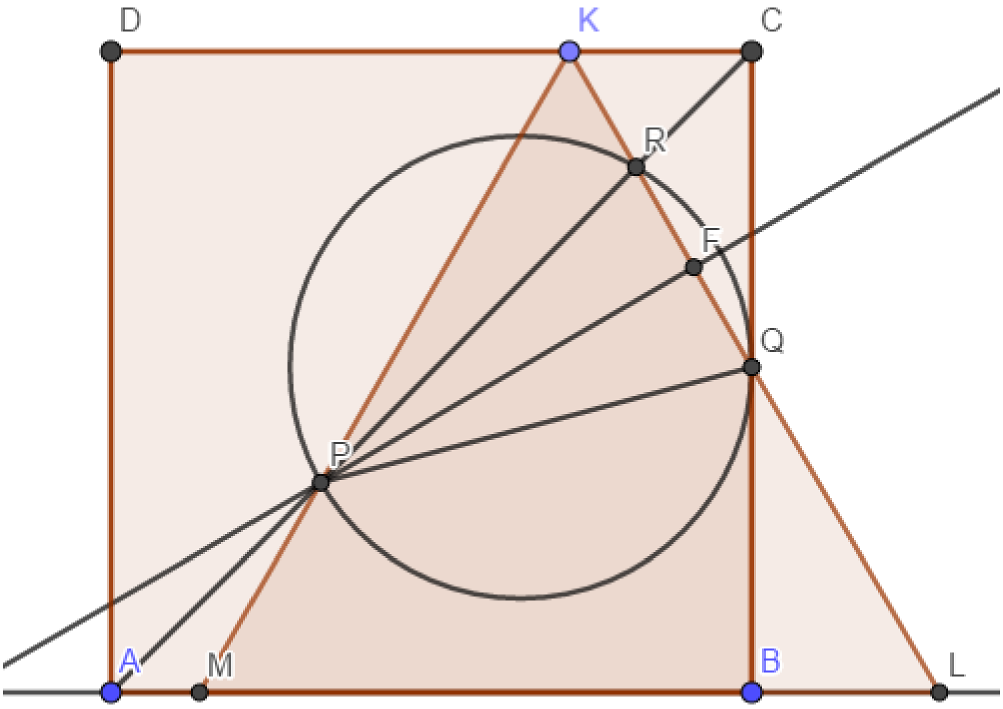
Construyamos los puntos del enunciado.



Tenemos que $\angle PRQ = 75º$. Si construimos el punto S tal que $\angle QRS = 15º$, y S en la circunferencia circunscrita a PRS, tenemos que $\angle PRS = 90º$, y E, punto medio de PS es el circuncentro de PRS.

Por otra parte, tenemos $\angle PKR = 60º, \angle KPR = 15º$.

Si trazamos la perpendicular por P a KQ,



Obtenemos el punto F

Los triángulos PFR y PRS son rectángulos en F y R y RF es la altura de la hipotenusa de PRS.

Por ello, los puntos P F y S están alineados, y $\angle RPS = 15º$

Asi, $\angle RPQ = \angle RPS + \angle QRS = 30º$

Así, E es el circuncentro de RPQ, y el triángulo REQ es equilátero.

Luego $\angle CQE = \angle CQR + \angle RQE = 30º + 60º = 90º$

Es decir, *1* es tangente a (BC) en Q.

Ricardo Barroso Campos

Jubilado.

Sevilla

España