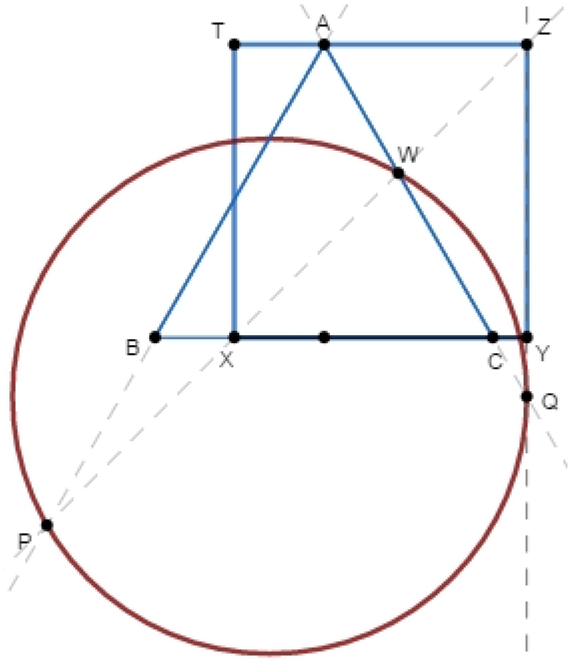
# TRIÁNGULOS CABRI

**Problema 924.** (Aymé, J. L., 2019) Dado un punto $A$ sobre el segmento $ZT$ de un cuadrado $XYZT$, se consideran dos puntos $B$ y $C$ sobre la recta $XY$ de forma que $ABC$ es un triángulo equilátero. Demostrar que, si $P$ es el punto de intersección entre las rectas $AB$ y $XZ$, $Q$ es el punto de intersección entre las rectas $AC$ e $YZ$ y $W$ es el punto de intersección entre las rectas $PZ$ y $QA$, entonces, la circunferencia circunscrita al triángulo $PQW$ es tangente a la recta $YZ$ en el punto $Q$.




*Solución:*

Por razones de proporcionalidad, podemos suponer que los lados del triángulo $ABC$ tienen longitud unidad, es decir, $a = b = c = 1$, por lo que, considerando coordanadas baricéntricas con respecto a dicho triángulo, si:

$$\begin{cases} X = (0 : u : 1-u) \\ Y = (0 : v : 1-v) \end{cases}$$

entonces:

$$\frac{3}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = XY^2 = (u-v)^2 \Rightarrow 4(u-v)^2 - 3 = 0$$

Además, como la recta $YZ$ es paralela a la mediana correspondiente al vértice $A$ y la recta $ZT$ es paralela a la recta $AB$, entonces:

$$\begin{cases} YZ \equiv 0 = (2v-1)x + 2(v-1)y + 2vz \\ AZ \equiv 0 = y + z \end{cases} \Rightarrow Z = (2 : 2v-1 : 1-2v)$$

por lo que:

$$XZ \equiv 0 = (2v-1)x + 2(u-1)y + 2uz$$

**Miguel-Ángel Pérez García-Ortega**

luego:

$$\begin{cases} P = AB \cap XZ = (2(u-1) : 1-2v : 0) \\ Q = AC \cap YZ = (2v : 0 : 1-2v) \\ W = AC \cap XZ = (2u : 0 : 1-2v) \end{cases}$$

y, por tanto, la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo $PQW$ es:

$$(2v-1)^2(1-2u+2v)x^2 + 4(u-1)(2v^2-2uv+v-1)y^2 + 4uv(1-2u+2v)z^2 + 2(1-2v)(2u^2-2v^2+3u+v+2)xy + 2(1-2v)(2u^2-2v^2-u-v)xz + (16u^2v-16uv^2-4u^2+4v^2-8uv+4u+4v-3)yz = 0$$

siendo sus puntos de corte con la recta $YZ$:

$$\begin{cases} Q_1 = (2v : 0 : 1-2v) \\ Q_2 = (2(2(u-v)^2+4v^3+4u^2v-8uv^2+3v-3) : (2v-1)(4(u-v)^2-3) : 8(u-v)^2(1-2v)) \end{cases}$$

Finalmente, como el producto vectorial de los vectores $(2v, 0, 1-2v)$ y $(2(2(u-v)^2+4v^3+4u^2v-8uv^2+3v-3), (2v-1)(4(u-v)^2-3), 8(u-v)^2(1-2v))$ es:

$$\left[4(u-v)^2-3\right]((1-2v)^2, 2(v-1)(2v-1), 2v(2v-1)) \underset{4(u-v)^2-3=0}{=} 0$$

entonces:

$$Q_1 = Q = Q_2$$

y, por tanto, la circunferencia circunscrita al triángulo $PQW$ es tangente a la recta $YZ$ en el punto $Q$.