

Problema 924

Siga ABCD un quadrat, K un punt sobre el costat $\overline{CD}$

Siguen M i L dos punts sobre la recta AB tal que $\triangle KLM$ siga un triangle equilàter.

Siga P la intersecció de les rectes LK i AC.

Siga Q la intersecció de les rectes MK i BC.

Siga R la intersecció de les rectes PC i QK.

Siga Γ la circumferència circumscrita al triangle $\triangle PQR$

Demostreu que la circumferència Γ és tangent a la recta BC en Q.

Aymé, J. L. (2019): Comunicació personal.

Solució de Ricard Peiró:

Notem que $\angle KQC = 30^\circ, \angle PKC = 120^\circ, \angle KCP = 45^\circ$

$\angle KPC = 15^\circ$

$\angle KRC = 75^\circ$

Siga $x = \overline{CK}$

$\overline{QK} = 2x$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle KRC$

$$\frac{\overline{KR}}{\sin 45^\circ} = \frac{x}{\sin 75^\circ}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle PQR$

$$\frac{\overline{PR}}{\sin 60^\circ} = \frac{\overline{KR}}{\sin 15^\circ}$$

$$\overline{PR} = \frac{\sin 60^\circ \sin 45^\circ}{\sin 15^\circ \sin 75^\circ} x = x\sqrt{6}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle PQC$

$$\frac{\overline{PK}}{\sin 45^\circ} = \frac{x}{\sin 15^\circ}$$

$$\overline{PK} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ} x = (1 + \sqrt{3})x$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle PKQ$

$$\overline{PQ}^2 = (2x)^2 + ((1 + \sqrt{3})x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot (1 + \sqrt{3}) \cdot \cos 60^\circ = 6x^2$$

$$\text{Aleshores, } \overline{PR} = \overline{PQ} = x\sqrt{6}$$

Per tant el triangle $\triangle PQR$ és isòsceles:

$$\angle PQR = \angle PRQ = 75^\circ$$

$$\text{Aleshores, } \angle RPQ = 30^\circ$$

$$\angle RPQ = \angle PQC = 30^\circ$$

Aleshores, $\angle RQC$ és semiinscrit de la circumferència.

Aleshores, la circumferència Γ és tangent a la recta BC en Q.

