

Problema 924

Siga ABCD un quadrat, K un punt sobre el costat $\overline{CD}$

Siguen M i L dos punts sobre la recta AB tal que $\triangle KLM$ siga un triangle equilàter.

Siga P la intersecció de les rectes LK i AC.

Siga Q la intersecció de les rectes MK i BC.

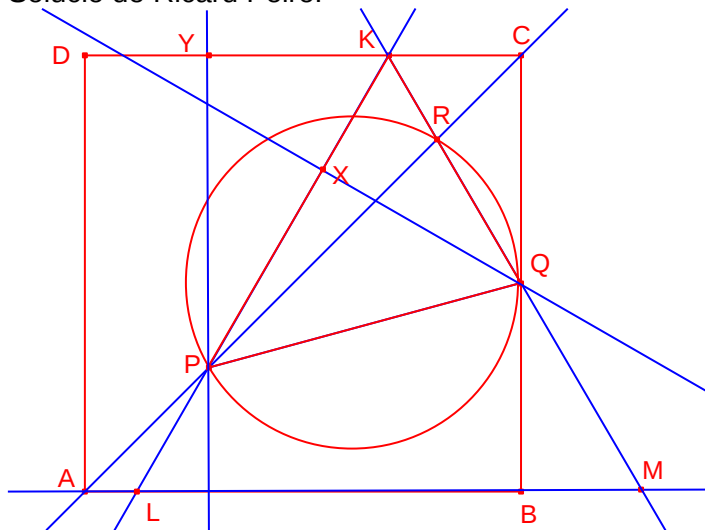
Siga R la intersecció de les rectes PC i QK.

Siga Γ la circumferència circumscrita al triangle $\triangle PQR$

Demostreu que la circumferència Γ és tangent a la recta BC en Q.

Aymé, J. L. (2019): Comunicació personal.

Solució de Ricard Peiró:



Notem que $\angle KQC = 30^\circ, \angle PKC = 120^\circ, \angle KCP = 45^\circ$

$\angle KPC = 15^\circ$

$\angle KRC = 75^\circ$

Siga $x = \overline{CK}$

$\overline{QK} = 2x$

Siga Y la projecció de P sobre la recta CD.

Siga X la projecció de Q sobre la recta PK

$\overline{KX} = x$

$\overline{QX} = x\sqrt{3}$

Siga $y = \overline{KY}$

$\overline{PY} = x + y = y\sqrt{3}, \overline{PK} = 2y$

$y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}x$

$\overline{PX} = \overline{PK} - \overline{KX} = 2y - x = x\sqrt{3}$

Aleshores, $\overline{PX} = \overline{QX}$

Per tant, $\angle XPQ = 45^\circ$

$\angle RPQ = \angle XPQ - \angle KPR = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$

$\angle ROC = \angle RPQ = 30^\circ$

Aleshores, $\angle RQC$ és semiinscrit de la circumferència.

Aleshores, la circumferència Γ és tangent a la recta BC en Q.