Problema 924

Sea ABCD un cuadrado, K un punto sobre [CD].

Sean M y L dos puntos sobre la recta AB tal que KLM sea un triángulo equilátero.

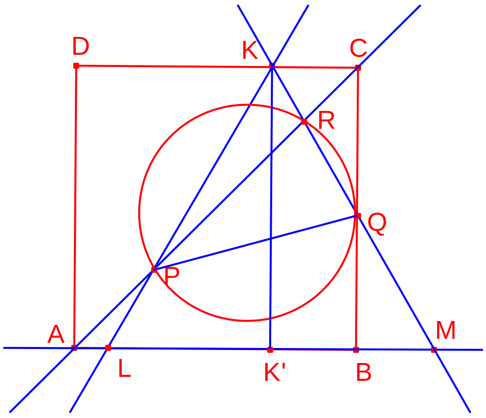
Sean P la intersección de (LK) con (AC) y Q la intersección de (MK) y (BC), R la intersección de (PC) y (QK).

Sea *1* la circunferencia circunscrita al triángulo PQR.

Demostrar que *1* es tangente a (BC) en Q.

Aymé, J. L. (2019): Comunicación personal.

Solución de Ricard Peiró:



Notamos que $\angle KQC = 30°, \angle PKC = 120°, \angle KCP = 45°$
$\angle KPC = 15°$
$\angle KRC = 75°$

Sea $x = \overline{CK}$
$\overline{QK} = 2x$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{KRC}$

$$\frac{\overline{KR}}{\sin 45°} = \frac{x}{\sin 75°}$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{PQR}$

$$\frac{\overline{PR}}{\sin 60°} = \frac{\overline{KR}}{\sin 15°}$$

$$\overline{PR} = \frac{\sin 60°}{\sin 15°}\frac{\sin 45°}{\sin 75°}x = x\sqrt{6}$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{PQC}$

$$\frac{\overline{PK}}{\sin 45°} = \frac{x}{\sin 15°}$$

$$\overline{PK} = \frac{\sin 45°}{\sin 15°}x = \left(1+\sqrt{3}\right)x$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{PKQ}$

$$\overline{PQ}^2 = (2x)^2 + \left(\left(1+\sqrt{3}\right)x\right)^2 - 2\cdot 2x \cdot \left(1+\sqrt{3}\right)\cdot \cos 60° = 6x^2$$

Entonces, $\overline{PR} = \overline{PQ} = x\sqrt{6}$

Por tanto el triángulo $\overset{\Delta}{PQR}$ es isósceles:
$\angle PQR = \angle PRQ = 75°$
Entonces, $\angle RPQ = 30°$
$\angle RPQ = \angle PQC = 30°$
Entonces, $\angle RQC$ es semiinscrito de la circunferencia.

Entonces, la circunferencia ***l*** es tangente a la recta BC en Q.