Problema 924

Sea ABCD un cuadrado, K un punto sobre [CD].

Sean M y L dos puntos sobre la recta AB tal que KLM sea un triángulo equilátero.

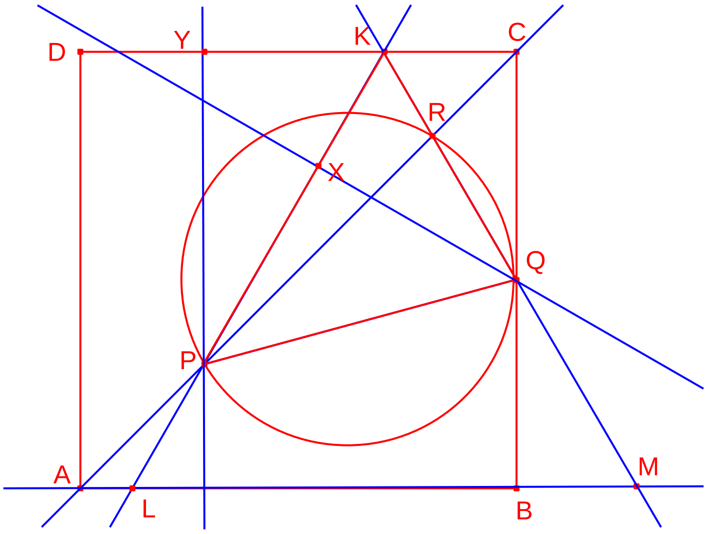
Sean P la intersección de (LK) con (AC) y Q la intersección de (MK) y (BC), R la intersección de (PC) y (QK).

Sea *1* la circunferencia circunscrita al triángulo PQR.

Demostrar que *1* es tangente a (BC) en Q.

Aymé, J. L. (2019): Comunicación personal.

Solución de Ricard Peiró:



Notamos que $\angle KQC = 30°, \angle PKC = 120°, \angle KCP = 45°$
$\angle KPC = 15°$
$\angle KRC = 75°$

Sea $x = \overline{CK}$
$\overline{QK} = 2x$
Sea Y la projecció de P sobre la recta CD.
Sea X la proyección de Q sobre la recta PK
$\overline{KX} = x$
$\overline{QX} = x\sqrt{3}$

Sea $y = \overline{KY}$

$\overline{PY} = x + y = y\sqrt{3}, \overline{PK} = 2y$
$$y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}x$$

$\overline{PX} = \overline{PK} - \overline{KX} = 2y - x = x\sqrt{3}$

Entonces, $\overline{PX} = \overline{QX}$

Por tanto, , $\angle XPQ = 45°$
$\angle RPQ = \angle XPQ - \angle KPR = 45° - 15° = 30°$
$\angle ROC = \angle RPQ = 30°$
Entonces, $\angle RQC$ es semiinscrito de la circunferencia.
Entonces, la circunferencia *l* es tangente a la recta BC en Q.