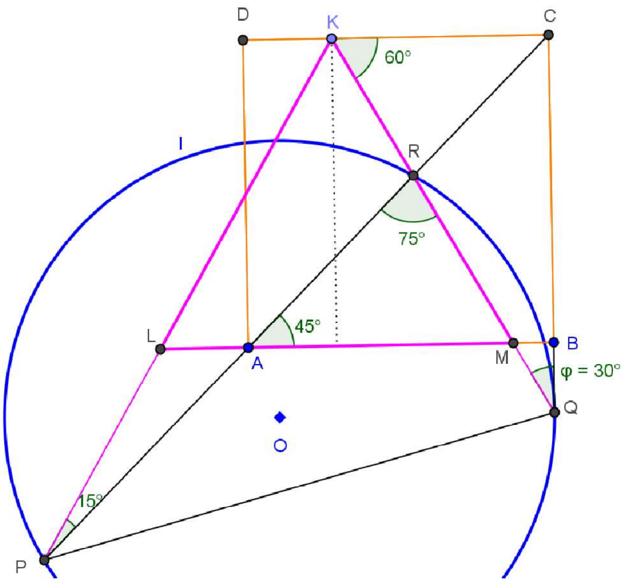
Quincena del 1 al 15 de Noviembre de 2019

Propuesto por Jean Louis Aymé, Île de la Réunion.

***Problema* 924**.- *Sea $ABCD$ un cuadrado, K un punto sobre $[CD]$. Sean M y L dos puntos sobre la recta AB tal que KLM sea un triángulo equilátero. Sean P la intersección de (LK) con (AC) y Q la intersección de (MK) y (BC), R la intersección de (PC) y (QK).*

Sea l la circunferencia circunscrita al triángulo PQR. Demostrar que l es tangente a (BC) en Q.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Por ser KLM equilátero y AC la diagonal del cuadrado $\measuredangle PRQ = 75°$.

Del triángulo ΔRQC deducimos que $\measuredangle RQC = 30°$. En ΔKRC se tiene la relación $\frac{KR}{KC} = \frac{\text{sen } 45°}{\text{sen } 75°}$.

Queremos demostrar que $\frac{CQ}{CR} = \frac{CP}{CQ}$ y esto, según la potencia del punto C respecto de la circunferencia l demostrará que la recta BC es tangente a ella en Q.

Observando la figura, en del triángulo QRC podemos concluir que $\frac{CQ}{CR} = \frac{\text{sen } 75°}{\text{sen } 30°} = 2 \cdot \text{sen } 75° = \frac{1}{2\text{sen } 15°}$.

$$\frac{CP}{CQ} = \frac{CR}{CQ} + \frac{RP}{CQ}$$

Del triángulo PRK se tiene $RP = \frac{\text{sen } 60°}{\text{sen } 15°} \cdot KR$ y del KCQ, $CQ = 2 \cdot \text{ sen } 60° \cdot KC$. Con todo esto

$\frac{RP}{CQ} = \frac{1}{2 \cdot \text{sen } 15°} \cdot \frac{KR}{KC} = \frac{1}{2 \cdot \text{sen } 15°} \cdot \frac{\text{sen } 45°}{\text{sen } 75°} = 2 \cdot \text{sen } 45°$ usando la igualdad $4 \cdot \text{sen } 75° \cdot \text{sen } 15° = 1$. Con todo esto

$$\frac{CP}{CQ} = 2 \cdot \text{sen } 15° + 2 \cdot \text{sen } 45° = 2 \cdot \text{sen } 75°$$

■