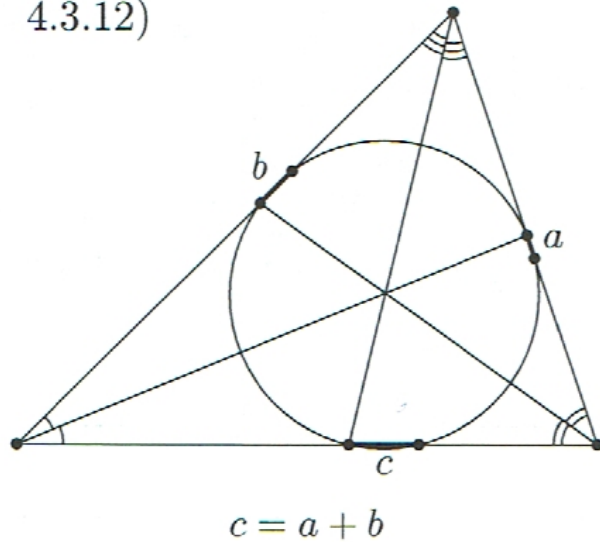


Lema Sean AA_1, BB_1 y CC_1 las tres bisectrices del triángulo ABC ; entonces por el teorema de la bisectriz

$$\begin{aligned} BA_1 &= \frac{ac}{b+c} & A_1C &= \frac{ab}{b+c} \\ AB_1 &= \frac{bc}{a+c} & B_1C &= \frac{ab}{a+c} \\ AC_1 &= \frac{bc}{a+b} & C_1B &= \frac{ac}{a+b} \end{aligned}$$

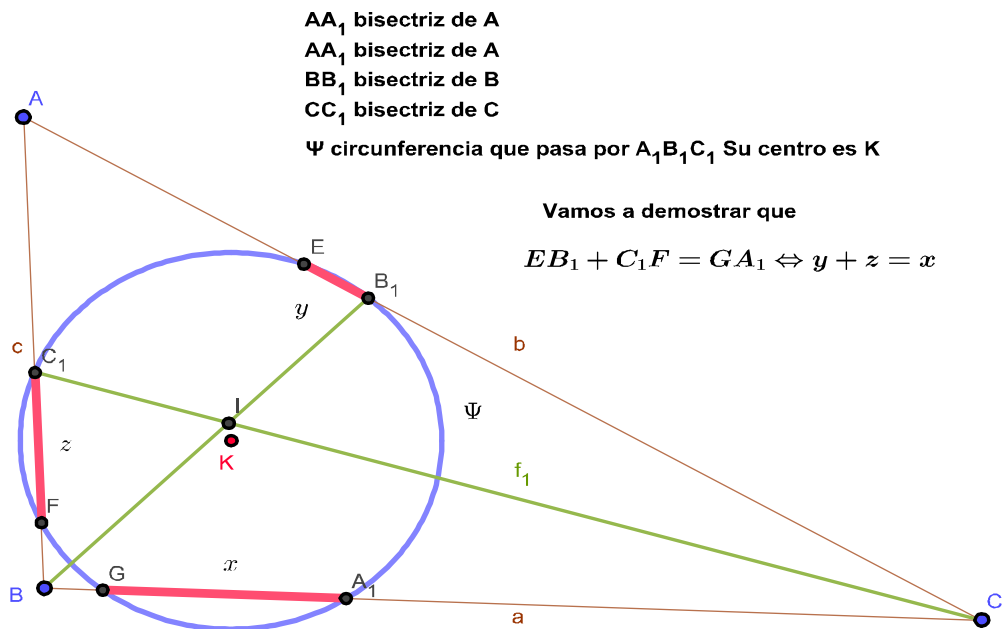
Problem 1 Akopyan, A. (2019): *Figures sans paroles. Deuxième édition.* . (4.3.12) (p. 32)

4.3.12)



Solución

Para evitar confusión con la notación clásica aquí vuelvo a dar una imagen aclaratoria con una notación diferente
Dado el $\triangle ABC$ cuyo incentro es I Sean AA_1, BB_1, CC_1 las bisectrices de cada uno de los vértices



$$\text{Sean } \begin{bmatrix} \Psi \cap AC = \{E, B_1\} \\ \Psi \cap AB = \{F, C_1\} \\ \Psi \cap BC = \{G, A_1\} \end{bmatrix} \text{ y sean } x = GA_1, y = EB_1 \text{ y } z = C_1F$$

Vamos a demostrar que $EB_1 + C_1F = GA_1 \iff y + z = x$

Por la potencia de B con respecto Ψ

$$Pot_{\Psi}(B) = BG \cdot BA_1 = BF \cdot BC_1$$

$$\text{Como } \begin{bmatrix} BA_1 = BG + GA_1 = BG + x \text{ y } BA_1 = \frac{ac}{b+c} \implies BG = \frac{ac}{b+c} - x \\ BC_1 = BF + FC_1 = BF + z \text{ y } BC_1 = \frac{ac}{a+b} \implies BF = \frac{ac}{a+b} - z \end{bmatrix}.$$

Obtenemos

$$\left(\frac{ac}{b+c} - x \right) \frac{ac}{b+c} = \left(\frac{ac}{a+b} - z \right) \frac{ac}{a+b} \iff x \frac{ac}{b+c} - \frac{ac}{a+b} z = \frac{a^2 c^2 (a-c)(a+2b+c)}{(b+c)^2 (a+b)^2} \quad (1)$$

Aplicando el concepto de potencia ahora desde el punto A

$$Pot_{\Psi}(A) = AE \cdot AB_1 = AC_1 \cdot AF$$

$$\text{Como } \begin{bmatrix} AB_1 = AE + EB_1 = AE + y \text{ y } AB_1 = \frac{bc}{a+c} \implies AE = \frac{bc}{a+c} - y \\ AF = AC_1 + C_1F = AC_1 + z = \frac{bc}{a+b} + z \end{bmatrix}$$

Se tiene

$$\left(\frac{bc}{a+c} - y \right) \frac{bc}{a+c} = \left(\frac{bc}{a+b} + z \right) \frac{bc}{a+b} \iff y \frac{bc}{a+c} + z \frac{bc}{a+b} = \frac{b^2 c^2 (b-c)(2a+b+c)}{(a+c)^2 (a+b)^2} \quad (2)$$

Idem desde el punto C

$$Pot_{\Psi}(C) = CB_1 \cdot CE = CA_1 \cdot CG$$

$$\text{Como } \begin{bmatrix} CE = CB_1 + B_1E = \frac{ab}{a+c} + y \\ CG = CA_1 + A_1G = \frac{ab}{b+c} + x \end{bmatrix}$$

Se obtiene

$$\frac{ab}{a+c} \left(\frac{ab}{a+c} + y \right) = \frac{ab}{b+c} \left(\frac{ab}{b+c} + x \right) \iff -x \frac{ab}{b+c} + y \frac{ab}{a+c} = \frac{a^2 b^2 (a-b)(a+b+2c)}{(b+c)^2 (a+c)^2} \quad (3)$$

Resolviendo el sistema formado por (1), (2) y (3)

$$\begin{cases} x \frac{ac}{b+c} - \frac{ac}{a+b} z = \frac{a^2 c^2 (a-c)(a+2b+c)}{(b+c)^2 (a+b)^2} \\ y \frac{bc}{a+c} + z \frac{bc}{a+b} = \frac{b^2 c^2 (b-c)(2a+b+c)}{(a+c)^2 (a+b)^2} \\ -x \frac{ab}{b+c} + y \frac{ab}{a+c} = \frac{a^2 b^2 (a-b)(a+b+2c)}{(b+c)^2 (a+c)^2} \end{cases}$$

Evidentemente no voy a resolver el sistema

Bastará con que comprobemos (mejor que lo haga el ordenata) que

$$\begin{vmatrix} \frac{ac}{b+c} & \frac{a^2 c^2 (a-c)(a+2b+c)}{(b+c)^2 (a+b)^2} & -\frac{ac}{a+b} \\ 0 & \frac{b^2 c^2 (b-c)(2a+b+c)}{(a+c)^2 (a+b)^2} & \frac{bc}{a+b} \\ -\frac{ab}{b+c} & \frac{a^2 b^2 (a-b)(a+b+2c)}{(b+c)^2 (a+c)^2} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{ac}{b+c} & 0 & \frac{a^2 c^2 (a-c)(a+2b+c)}{(b+c)^2 (a+b)^2} \\ 0 & \frac{bc}{a+c} & \frac{b^2 c^2 (b-c)(2a+b+c)}{(a+c)^2 (a+b)^2} \\ -\frac{ab}{b+c} & \frac{ab}{a+c} & \frac{a^2 b^2 (a-b)(a+b+2c)}{(b+c)^2 (a+c)^2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{a^2 c^2 (a-c)(a+2b+c)}{(b+c)^2 (a+b)^2} & 0 & -\frac{ac}{a+b} \\ \frac{b^2 c^2 (b-c)(2a+b+c)}{(a+c)^2 (a+b)^2} & \frac{bc}{a+c} & \frac{bc}{a+b} \\ \frac{a^2 b^2 (a-b)(a+b+2c)}{(b+c)^2 (a+c)^2} & \frac{ab}{a+c} & 0 \end{vmatrix} \text{ da cero}$$

Como así es ;queda demostrado el problema