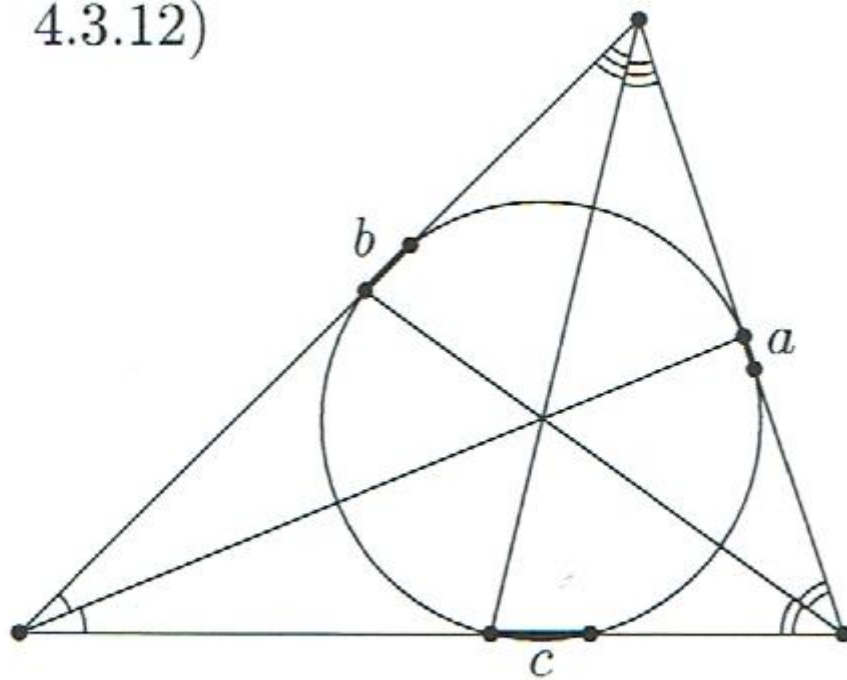


Problema 925

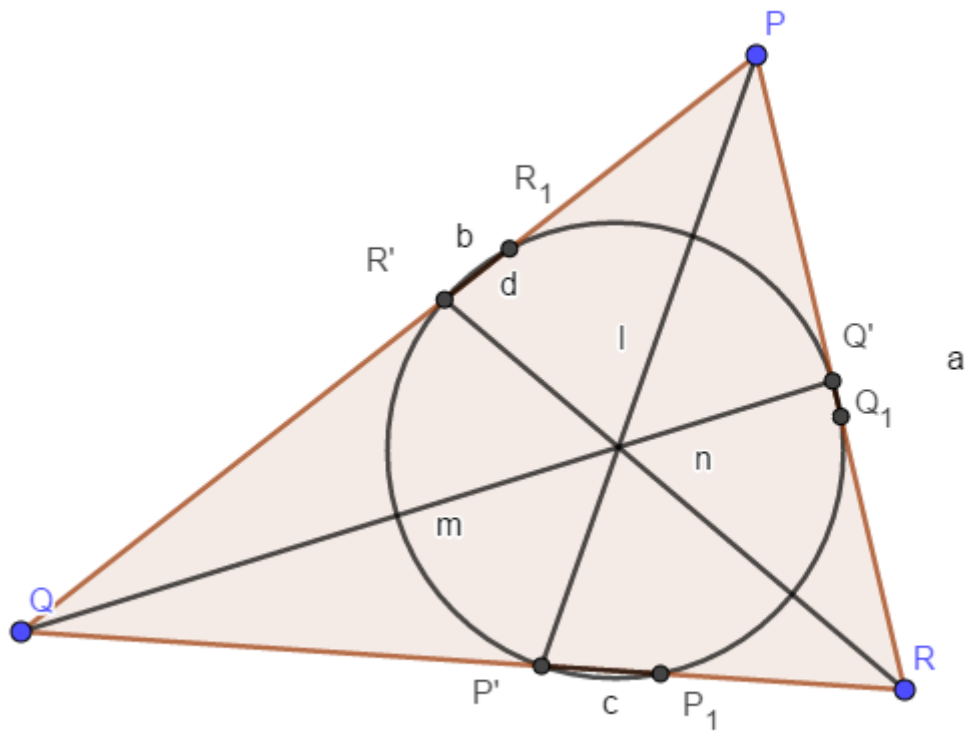
Akopyan, A. (2019): Figures sans paroles. Deuxième édition. . (4.3.12) (p. 32)

4.3.12)



$$c = a + b$$

Solución del director



En la figura se observa que $PR < QR < QP$, y $q < p < r$.

Si consideramos el vértice Q del triángulo, tenemos

$$QP' = \frac{pr}{q+r}, QR' = \frac{rp}{p+q}$$

Luego ha de ser

$$\left(\frac{pr}{q+r}\right)\left(\frac{pr}{q+r} + c\right) = \left(\frac{rp}{p+q}\right)\left(\frac{rp}{p+q} + b\right)$$

De donde,

$$A) \frac{c}{q+r} - \frac{b}{p+q} = \frac{rp}{(p+q)^2} - \frac{pr}{(q+r)^2}$$

Si consideramos el vértice P del triángulo, tenemos

$$PR' = \frac{rq}{p+q}, PQ' = \frac{qr}{p+r}$$

Luego ha de ser

$$\left(\frac{rq}{p+q}\right)\left(\frac{rq}{p+q} - b\right) = \left(\frac{qr}{p+r}\right)\left(\frac{qr}{p+r} + a\right)$$

De donde B) $-\frac{b}{p+q} - \frac{a}{p+r} = \frac{qr}{(p+r)^2} - \frac{rq}{(p+q)^2}$

Si consideramos el vértice R, será:

$$RQ' = \frac{qp}{p+r}, RP' = \frac{pq}{r+q}$$

Luego ha de ser

$$\left(\frac{qp}{p+r}\right)\left(\frac{qp}{p+r} - a\right) = \left(\frac{pq}{r+q}\right)\left(\frac{pq}{r+q} - c\right)$$

De donde,

$$C) \frac{c}{r+q} - \frac{a}{p+r} = \frac{pq}{(r+q)^2} - \frac{qp}{(p+r)^2}$$

Restando las expresiones A) y B), tenemos:

$$D) \frac{c}{q+r} + \frac{a}{p+r} = \frac{rp}{(p+q)^2} - \frac{pr}{(q+r)^2} - \frac{qr}{(p+r)^2} + \frac{rq}{(p+q)^2}$$

Sumando C) y D), obtenemos:

$$\frac{2c}{q+r} = \frac{pq}{(r+q)^2} - \frac{qp}{(p+r)^2} + \frac{rp}{(p+q)^2} - \frac{pr}{(q+r)^2} - \frac{qr}{(p+r)^2} + \frac{rq}{(p+q)^2}$$

Es decir,

$$\frac{2c}{q+r} = \frac{p(q-r)}{(r+q)^2} - \frac{q(p+r)}{(p+r)^2} + \frac{r(p+q)}{(p+q)^2}$$

De donde

$$c = \frac{p(q-r)}{2(r+q)} - \frac{q(q+r)}{2(p+r)} + \frac{r(q+r)}{2(p+q)}$$

Si restamos las expresiones C) y B), tenemos:

$$E) \frac{c}{r+q} + \frac{b}{p+q} = \frac{pq}{(r+q)^2} - \frac{qp}{(p+r)^2} - \frac{qr}{(p+r)^2} + \frac{rq}{(p+q)^2}$$

Ahora sumamos E) y A):

$$\frac{2b}{p+q} = \frac{pq}{(r+q)^2} - \frac{qp}{(p+r)^2} - \frac{qr}{(p+r)^2} + \frac{rq}{(p+q)^2} - \frac{rp}{(p+q)^2} + \frac{pr}{(q+r)^2}$$

Es decir:

$$\frac{2b}{p+q} = \frac{p(r+q)}{(r+q)^2} - \frac{q(p+r)}{(p+r)^2} + \frac{r(q-p)}{(p+q)^2}$$

Luego

$$b = \frac{p(p+q)}{2(r+q)} - \frac{q(p+q)}{2(p+r)} + \frac{r(q-p)}{2(p+q)}$$

$$A) \frac{c}{q+r} - \frac{b}{p+q} = \frac{rp}{(p+q)^2} - \frac{pr}{(q+r)^2}$$

$$B) -\frac{b}{p+q} - \frac{a}{p+r} = \frac{qr}{(p+r)^2} - \frac{rq}{(p+q)^2}$$

$$C) \frac{c}{r+q} - \frac{a}{p+r} = \frac{pq}{(r+q)^2} - \frac{qp}{(p+r)^2}$$

Si restamos B) de A), tenemos:

$$G) \frac{c}{q+r} + \frac{a}{p+r} = \frac{rp}{(p+q)^2} - \frac{pr}{(q+r)^2} - \frac{qr}{(p+r)^2} + \frac{rq}{(p+q)^2}$$

Y restando C) de G), es:

$$\frac{2a}{p+r} = \frac{rp}{(p+q)^2} - \frac{pr}{(q+r)^2} - \frac{qr}{(p+r)^2} + \frac{rq}{(p+q)^2} - \frac{pq}{(r+q)^2} + \frac{qp}{(p+r)^2}$$

$$\text{O sea, } \frac{2a}{p+r} = \frac{r(p+q)}{(p+q)^2} - \frac{p(q+r)}{(q+r)^2} - \frac{q(r-q)}{(p+r)^2}$$

$$\text{Y por tanto, } a = \frac{r(p+r)}{2(p+q)} - \frac{p(p+r)}{2(q+r)} - \frac{q(r-q)}{2(p+r)}$$

Así, pues,

$$c = \frac{p(q-r)}{2(r+q)} - \frac{q(q+r)}{2(p+r)} + \frac{r(q+r)}{2(p+q)}$$

$$b = \frac{p(p+q)}{2(r+q)} - \frac{q(p+q)}{2(p+r)} + \frac{r(q-p)}{2(p+q)}$$

$$a = \frac{r(p+r)}{2(p+q)} - \frac{p(p+r)}{2(q+r)} - \frac{q(r-q)}{2(p+r)}$$

Se tiene lo pedido.

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado.

Sevilla.

España