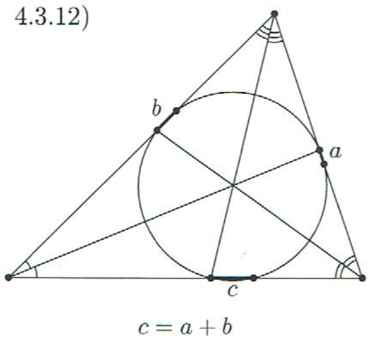
Problema 925

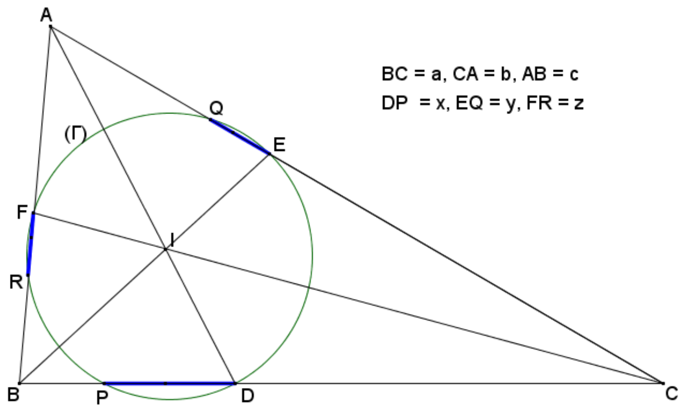


Akopyan, A. (2019): Figures sans paroles.Deuxième édition. . (4.3.12) (p. 32)

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

On désigne par D,E et F les pieds des bissectrices intérieures du triangle ABC sur les côtés BC,CA et AB et l'on retient les notations traditionnelles a,b et c des longueurs des côtés BC,CA et AB du triangle ABC puis x,y et z (et non par a,b,c comme dans la figure de A. Akopyan) qui sont les longueurs des cordes DP,EQ et FR délimitées par le cercle circonscrit (Γ) au triangle DEF sur les côtés BC,CA et AB.

On en déduit les longueurs des segments : BD = ca/(b+c), CD = ba/(b+c), CE = ab/(c+a), AE = cb/(c+a), AF = bc/(a+b) et BF = ac/(b+a).



Sans perte de généralité, on admet b > a > c. Avec le point P situé en entre B et D, le point Q est situé entre A et E et le point R entre B et F. Il s'agit de démontrer que DP = EQ + FR ou encore x = y + z.

On exprime les puissances des points A,B et C par rapport au cercle (Γ) et l'on obtient les trois égalités : **AE.AQ = AF.AR**, **BD.BP = BF.BR** et **CE.CQ = CD.CP.**

D'où les équations :

bc/(c+a)(bc/(c+a) – y) = bc/(a+b)(bc/(a+b) + z)

ca/(b+c)(ca/(b+c) – x) = ca/(b+a)(ca/(b+a) – z)

ab/(c+a)(ab/(c+a) + y) = ab/(c+b)(ab/(c+b) + y)

Ces équations linéaires en x,y et z permettent d'exprimer ces trois variables en fonction de a,b et c, à savoir :

$2(a+b)(b+c)(c+a)x = (b – c)((b+c)^2(a + b + c) – a(a + b)(c + a))$

$2(a+b)(b+c)(c+a)y = (a – c)((c+a)^2(a + b + c) – b(b + c)(a + b))$

$2(a+b)(b+c)(c+a)z = (b – a)((a+b)^2(a + b + c) – c(c + a)(b + c))$

Les coefficients de x,y et z étant identiques, il suffit de vérifier que :

$(b – c)((b+c)^2(a + b + c) – a(a + b)(c + a)) = (a – c)((c+a)^2(a + b + c) – b(b + c)(a + b)) + (b – a)((a+b)^2(a + b + c) – c(c + a)(b + c))$, ce qui est bien le cas après développement des expressions figurant dans les deux membres.

Le logiciel de calcul formel WolframAlpha confirme ce résultat