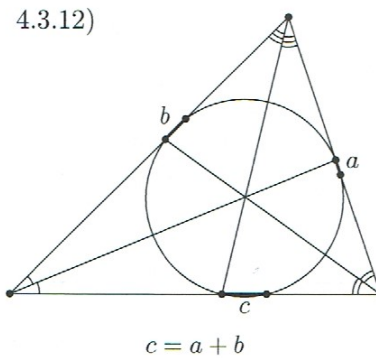


Quincena del 16 al 30 de Noviembre de 2019

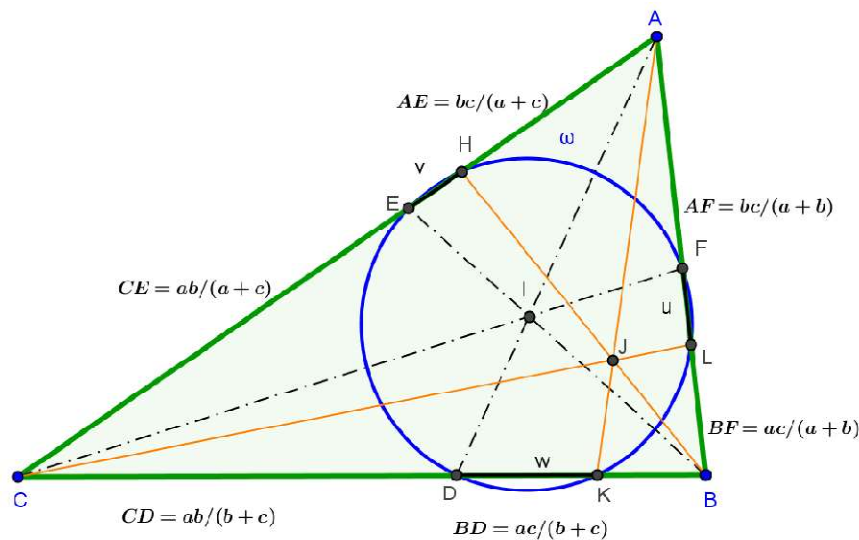
Akopyan, A. (2019): Figures sans paroles. Deuxième édition. . (4.3.12) (p. 32)

Problema 925.



Con permiso de Arseniy Akopyan, a quien agradezco la gentileza.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Está claro que es la circunferencia que pasa por los pies de las bisectrices interiores del triángulo ABC . Se trata de probar que la longitud del mayor de los tres segmentos que esta circunferencia define sobre el triángulo es igual a la suma de las longitudes de los otros dos.

Para no interferir en la notación clásica en la geometría del triángulo voy a llamar u, v y w a los tres segmentos del problema. Con este cambio lo que tenemos que demostrar es que $w = u + v$.

En la figura se han puesto además, las longitudes de los segmentos que los pies de las bisectrices determinan en los lados del triángulo según el teorema de la bisectriz.

Para los segmentos que nos ocupan tenemos, observando la figura, $u = BF - BL$; $v = AE - AH$ y $w = BD - BK$. Por tanto lo que tenemos que demostrar es que $BF + AE + BK = BD + BL + AH$.

En esta relación hay tres elementos de los que conocemos su longitud y otros tres desconocidos. Agrupándolos según este criterio la expresión anterior la ponemos como

$$BF - BD + AE = BL + AH - BK \quad (*)$$

De los segmentos del segundo miembro de la igualdad, utilizando la potencia de A respecto de la circunferencia que pasa por los pies de las bisectrices interiores y después la potencia de B , podemos poner

$$AH = \frac{a+c}{a+b} \cdot AL = \frac{a+c}{a+b} \cdot (c - BL); BK = \frac{b+c}{a+b} \cdot BL$$

y entonces

$$BL + AH - BK = \left(1 - \frac{a+c}{a+b} - \frac{b+c}{a+b}\right) \cdot BL + c \cdot \frac{a+c}{a+b} = c \cdot \frac{a+c}{a+b} - \frac{2c}{a+b} \cdot BL$$

Para el primer miembro tenemos

$$BF - BD + AE = c \left(\frac{a}{a+b} - \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} \right)$$

Igualándolos

$$\frac{2}{a+b} \cdot BL = \frac{a+c}{a+b} - \frac{a}{a+b} + \frac{a}{b+c} - \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} - \frac{b}{a+c} \quad (**)$$

Ahora hay que calcular BL . Vamos a llamar p, q y r respectivamente a las potencias de A, B y C respecto de la circunferencia de los pies de las bisectrices.

Aplicando el teorema de la bisectriz podemos calcular de inmediato $ap + bq = \frac{abc^2}{a+b}$; y también $bq + cr = \frac{a^2bc}{b+c}$ y $ap + cr = \frac{ab^2c}{a+c}$ bien por cálculo directo o por permutaciones de las letras.

A partir de estos también se puede calcular

$$bq - cr = (ap + bq) - (ap + cr) = \frac{abc^2}{a+b} - \frac{ab^2c}{a+c} = abc \left(\frac{c}{a+b} - \frac{b}{a+c} \right) \text{ y con este valor también}$$

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2b} \cdot [(bq + cr) + (bq - cr)] = \frac{1}{2b} \cdot \left[\frac{a^2bc}{b+c} + abc \left(\frac{c}{a+b} - \frac{b}{a+c} \right) \right] \\ &= \frac{ac}{2} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{c}{a+b} - \frac{b}{a+c} \right) \end{aligned}$$

Ahora ya podemos calcular BL .

A partir de $q = BF \cdot BL$ resulta

$$\frac{2}{a+b} \cdot BL = \frac{2}{a+b} \cdot \frac{q}{BF} = \frac{2}{a+b} \cdot \frac{ac}{2} \cdot \frac{a+b}{ac} \cdot \left(\frac{a}{b+c} + \frac{c}{a+b} - \frac{b}{a+c} \right) = \frac{a}{b+c} + \frac{c}{a+b} - \frac{b}{a+c}$$

Y como coincide con la expresión obtenida anteriormente en (**), concluimos. ■