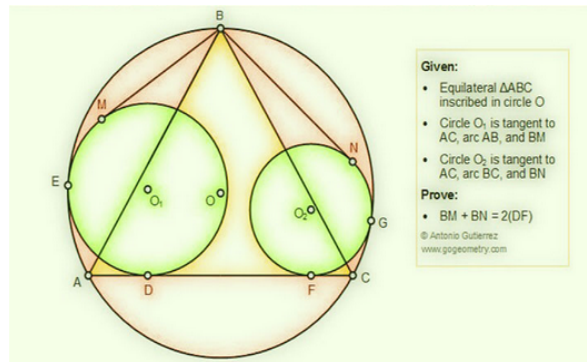
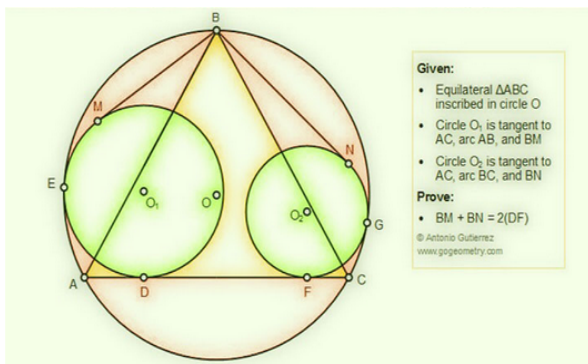


Problema 1 Resolver

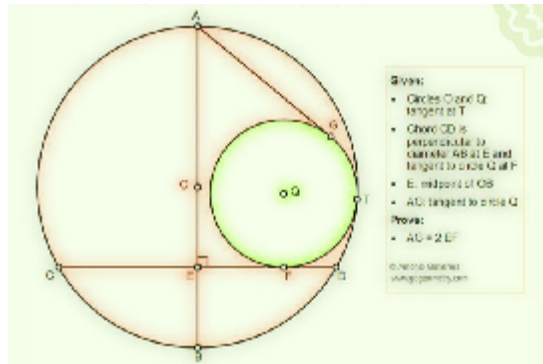


Solución

El problema se reduce a resolver el problema 1433 de la misma página cuyo gráfico acompaño



pr. 1434



pr. 1433

Suponiendo demostrado el 1433 es evidente que

$$BN = 2EF \text{ y } BM = 2ED$$

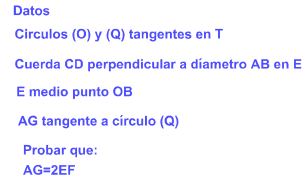
entonces

$$BN + BM = 2(EF + ED) = 2DF \text{ c.q.d. el pr.1434}$$

Vayamos pues a demostrar el problema 1433

Lo voy a resolver por Geometría analítica.

Dibujándolo con geogebra tenemos el gráfico siguiente


$$\text{Recta } CD \rightarrow s \equiv y = -\frac{R}{2}$$

Sea $R = AO$ el radio de (O) y $\alpha = \text{ang}(POT)$ con $\alpha \in (-30^\circ, 240^\circ)$

Las coordenadas de T son

Como la recta OT tiene de ecuación $y = x \tan \alpha$. Las coordenadas del Q buscado han de ser

Dicho punto ha de verificar que

(a)

Como $d^2(Q, T) = \left\| \overrightarrow{TQ} \right\|^2 = {}^1 (x_0 - R \cos \alpha)^2 + (x_0 \tan \alpha - R \sin \alpha)^2$ tendremos al sustituir en (a)

$$(x_0 - R \cos \alpha)^2 + (x_0 \tan \alpha - R \sin \alpha)^2 = \left(x_0 \tan \alpha + \frac{R}{2} \right)^2$$

Reduciendo términos

$$x_0^2 - R x_0 (2 \cos \alpha + \tan \alpha + 2 \sin \alpha \tan \alpha) + \frac{3R^2}{4} = 0$$

$$x_0^2 - x_0 R \frac{(\sin \alpha + 2)}{\cos \alpha} + \frac{3R^2}{4} = 0$$

$$x_0 = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{R}{\cos \alpha} \left(2 + \sin \alpha + \sqrt{4 \sin^2 \alpha + 4 \sin \alpha + 1} \right) > R \text{ no vale} \\ \frac{1}{2} \frac{R}{\cos(\alpha)} \left(2 + \sin \alpha - \sqrt{4 \sin^2 \alpha + 4 \sin \alpha + 1} \right) \end{cases}$$

Como $4 \sin^2 \alpha + 4 \sin \alpha + 1 = (2 \sin \alpha + 1)^2$ la solución es,

$$x_0 = \frac{1}{2} \frac{R(1 - \sin \alpha)}{\cos \alpha}$$

Así pues; las coordenadas del punto Q son

$$Q \left(\frac{1}{2} \frac{R(1 - \sin \alpha)}{\cos \alpha}, \frac{1}{2} \frac{R(1 - \sin \alpha) \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \right)$$

El radio, r , de (Q) es $QT = \left\| \overrightarrow{TQ} \right\|^2 = \left\| \left(R \frac{(2 \sin \alpha + 1)(\sin \alpha - 1)}{2 \cos \alpha}, R \sin \alpha \frac{(\sin \alpha - 1)(2 \sin \alpha + 1)}{2 \cos^2 \alpha} \right) \right\|^2$

$$r = QT = \frac{R(1 - \sin \alpha)(2 \sin \alpha + 1)}{2 \cos^2 \alpha}$$

Vamos ahora a calcular AG ;

Para ello primero determinaré AQ^2

$$\overrightarrow{AQ} = \left(\frac{1}{2} \frac{R(1 - \sin \alpha)}{\cos \alpha}, \frac{1}{2} \frac{R(1 - \sin \alpha) \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - R \right)$$

$$\overrightarrow{AQ} = \left(\frac{1}{2} \frac{R(1 - \sin \alpha)}{\cos \alpha}, \frac{R(\sin \alpha - 1)(\sin \alpha + 2)}{2 \cos^2 \alpha} \right)$$

$$AQ^2 = \frac{R^2(1 - \sin \alpha)^2}{4 \cos^2 \alpha} + \frac{R^2(1 - \sin \alpha)^2(\sin \alpha + 2)^2}{4 \cos^4 \alpha} = \frac{R^2(1 - \sin \alpha)^2(5 + 4 \sin \alpha)}{4 \cos^4 \alpha}$$

Trazando desde A la tangente a (Q) obtenemos el punto G de (Q)

Como el $\triangle AGQ$ es rectángulo en G y $QT = QG = \frac{R(1 - \sin \alpha)(2 \sin \alpha + 1)}{2 \cos^2 \alpha}$

$$AG^2 = AQ^2 - QG^2$$

$$AG^2 = \frac{R^2(1 - \sin \alpha)^2(5 + 4 \sin \alpha)}{4 \cos^4 \alpha} - \frac{R^2(1 - \sin \alpha)^2(2 \sin \alpha + 1)^2}{4 \cos^4 \alpha}$$

$$AG^2 = \frac{R^2(1 - \sin \alpha)^2}{\cos^4 \alpha} (1 - \sin^2 \alpha) = \frac{R^2(1 - \sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha}$$

¹ $\overrightarrow{TQ} = (x_0 - R \cos \alpha, x_0 \tan \alpha - R \sin \alpha)$

² $\frac{1}{2} \frac{R(1 - \sin \alpha)}{\cos \alpha} - R \cos \alpha = R \frac{2 \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha + 1}{2 \cos \alpha} = R \frac{(\sin \alpha + 1)(2 \sin \alpha + 1)}{2 \cos \alpha}$

$\frac{1}{2} \frac{R(1 - \sin \alpha) \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - R \sin \alpha = R \sin \alpha \frac{2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha - 1}{2 \cos^2 \alpha} = R \sin \alpha \frac{(\sin \alpha - 1)(2 \sin \alpha + 1)}{2 \cos^2 \alpha}$

Por lo que:

$$AG = \frac{R(1 - \sin \alpha)}{\cos \alpha}$$

Con lo que queda demostrado $AG = 2EF$ ya que $EF = \frac{1}{2} \frac{R(1 - \sin \alpha)}{\cos \alpha}$