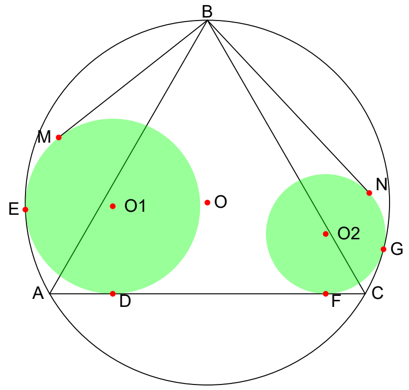
Pr. Cabri 926

Enunciado

Dados :
* ABC triéngulo equilátero inscrito en en el círculo O
* El círculo O1 es tangente al círculo O, a AC y a BM
* El círculo O2 es tangente al círculo O, a AC y a BN

Probar que BM+BN = 2DF



Solución

de César Beade Franco

Consideremos el triángulo equilátero de vértices A(-1,0), B(0,$\sqrt{3}$), C(1,0) y los puntos D(d,0) y F(f,0).

Este triánculo está inscrito a la circunferencia de centro O(0,$\frac{1}{\sqrt{3}}$) y radio $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

El círculo O1 tiene radio r y el O2, radio s. Teniendo en cuenta que OE=r+O1=$\frac{2}{\sqrt{3}}$, podemos calcular r y O1 (en función de d). Resulta que O1=(d,$\frac{3-3\,d^2}{2\sqrt{3}}$) y simétricamente O2=(f,$\frac{3-3\,f^2}{2\sqrt{3}}$).

Como BM es perpendicular a MO1, usando el teorema de Pitágoras y teniendo en cuenta que $|MO1|=|DO1|$

$$BM=\sqrt{|BO1|^2-|MO1|^2}=\sqrt{\left|\left(d,\ \frac{3-3d^2}{2\sqrt{3}}-\sqrt{3}\right)\right|^2-\left|\left(0,\ \frac{3-3d^2}{2\sqrt{3}}\right)\right|^2}=2d.$$

Análogamente BN=2f. Como DF=d+f, tenemos la igualdad pedida.