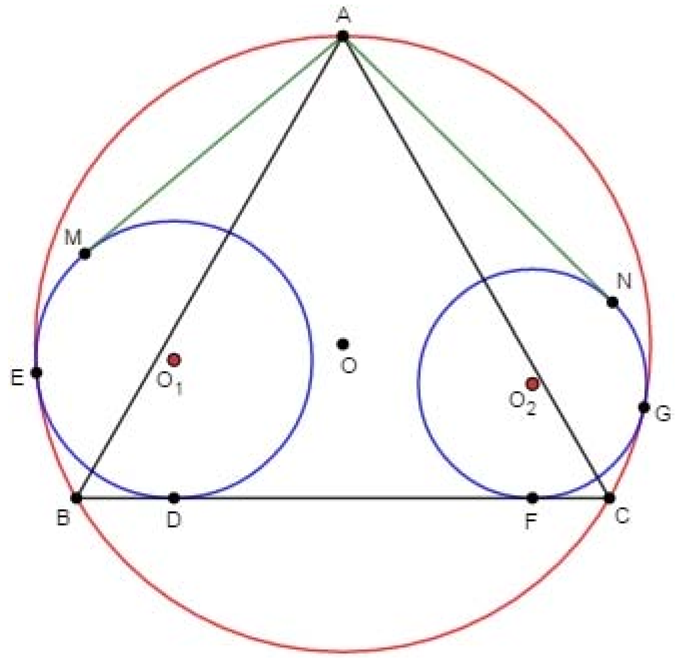
Ejercicio 926. (Gutiérrez, A., 2019) Dado un triángulo equilátero ABC inscrito en una circunferencia con centro $O,$ se consideran dos circunferencias con centros O_1 y $O_2,$ la primera de ellas tangente a la recta BC en el punto D y al arco AB en el punto E y la segunda de ellas tangente a la recta BC en el punto F y al arco CB en el punto $G.$ Si M y N son los puntos de tangencia de las tangentes a ambas circunferencias trazadas desde el punto $A,$ probar que:

$$AN + AM = 2DF$$



Solución:

Por razones de proporcionalidad, podemos suponer que la circunferencia circunscrita al triángulo ABC tiene radio unidad. En primer lugar, vamos a determinar el lugar geométrico que describen los centros de las circunferencias que son tangentes a la cuerda BC y al arco CB que dicha cuerda determina sobre la circunferencia. Considerando el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en el punto O y eje de abscisas en el diámetro de la circunferencia paralelo a la cuerda BC y aplicando el Teorema de Pitágoras, resulta que:

$$x^2 + y^2 = (1-r)^2 = \left[1 - \left(y + \frac{1}{2}\right)\right]^2 \Rightarrow y = \frac{1}{4} - x^2$$

por lo que los centros de las circunferencias están situados sobre la parábola que pasa por los puntos B y C y cuyo foco es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo $ABC.$ Además, para cada $f \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$ el centro y el radio de la circunferencia tangente a la cuerda BC en el punto $F = \left(f, -\frac{1}{2}\right)$ son, respectivamente, $C(f) = \left(f, \frac{1}{4} - f^2\right)$ y $r(f) = \frac{3}{4} - f^2,$ por lo que la ecuación de dicha circunferencia es:

$$(x-f)^2 + \left(y - \frac{1}{4} + f^2\right)^2 - \left(\frac{3}{4} - f^2\right)^2 = 0$$
$$2x^2 + 2y^2 - 4fx + (4f^2 - 1)y + 4f^2 - 1 = 0$$

y la recta polar del punto A respecto a ella es:

$$0=\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2(4f^2-1) & -4f & 4f^2-1 \\ -4f & 4 & 0 \\ 4f^2-1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=-4fx+(4f^2+3)y+3(4f^2-1)$$

Por tanto, resolviendo el correspondiente sistema de ecuaciones, podemos obtener los puntos de tangencia de las rectas tangentes trazadas desde el punto A a esta circunferencia, siendo éstos:

$$\begin{cases} N_1=\left(\dfrac{2f(9-4f^2)}{4f^2+9},\dfrac{9-20f^2}{4f^2+9}\right) \\ N_2=\left(\dfrac{2f(4f^2-1)}{4f^2+1},\dfrac{1-4f^2}{4f^2+1}\right) \end{cases}$$

por lo que:

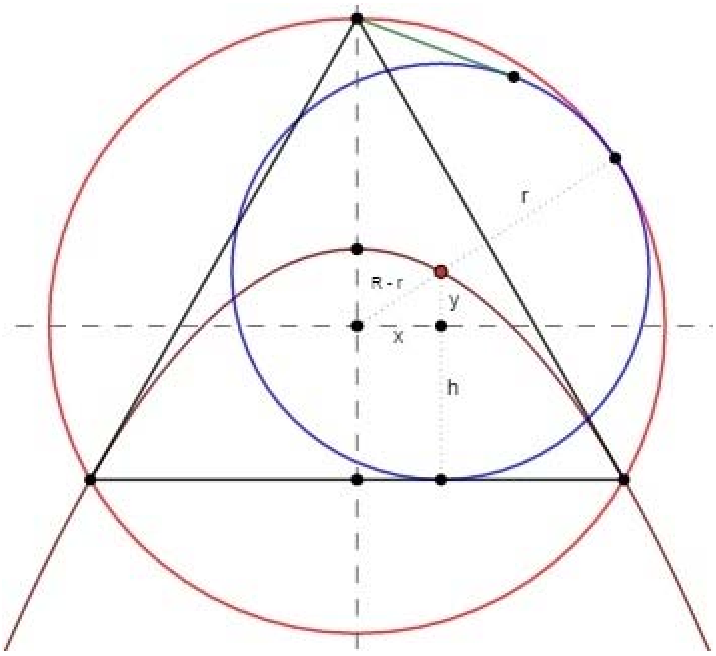
$$AN_1=AN_2=\sqrt{\left[\frac{2f(9-4f^2)}{4f^2+9}-0\right]^2+\left[\frac{9-20f^2}{4f^2+9}-1\right]^2}=2f$$

Finalmente, considerando el punto $D=\left(-d,-\frac{1}{2}\right)$, con $d\in\left[0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, y razonando de forma totalmente análoga, si M_1 y M_2 son los puntos de tangencia de las rectas tangentes trazadas desde el punto A a la circunferencia tangente a la cuerda BC en el punto D, obtendríamos que:

$$AM_1=AM_2=2d$$

y, por tanto:

$$AM+AN=2(d+f)=2DF$$



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega