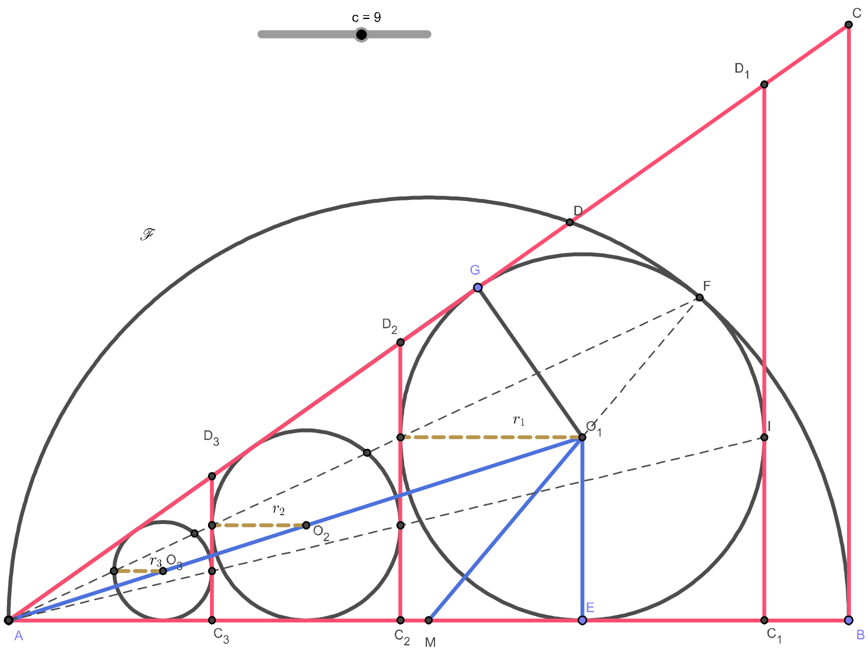
Problema Dado un triángulo rectángulo ABC, se consideran el (segundo) punto D de intersección entre la recta AC y la circunferencia con diámetro AB y la circunferencia (O_1) inscrita en el triángulo mixtilíneo DAB. A continuación, para cada $n \in N \sim \{1\}$, se considera la circunferencia (O_n) inscrita en el triángulo AC_nD_n, siendo C_n un punto de la recta AB y D_n un punto de la recta AC tales que la recta C_nD_n es paralela a la recta CB y tangente a la circunferencia (O_{n-1}) tal como se muestra en la siguiente figura



Calcular en función de la longitudes a,b,c de los lados del triángulo ABC y de la forma más simplificada posible, la suma total de las áreas encerradas por las circunferencias de la sucesión $\{(O_n)\}_{n\in N}$

Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega (2019)

Solución

Catetos $AB = c, BC = a$ .Hipotenusa $AC = b$ ($b^2 = c^2 + a^2$). Semiperímetro $s = \frac{a+b+c}{2}$

$\mathcal{F}$ semicircunferencia de diámetro AB y M punto medio de AB ($AM = \frac{c}{2}$)

(O_1) circunferencia tal que $\begin{bmatrix} (O_1) \cap AB = E \\ (O_1) \cap \mathcal{F} = F \\ (O_1) \cap AC = G \end{bmatrix}$

Si $\alpha = \widehat{BAC}$ como $\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{b-c}{b+c}} = \frac{b-c}{a}$

En el $\triangle AEO_1$ rectángulo en E sabemos que $\widehat{EAO_1} = \frac{\alpha}{2}$. Por lo que

$$OE_1 = AE\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{b-c}{a}AE \tag{a}$$

El segmento $ME = AE - AM = AE - \frac{c}{2}$

Si consideramos ahora el $\triangle MEO_1$ rectángulo en E tenemos que

$$MO_1^2 = ME^2 + EO_1^2 = \left(AE - \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{(b-c)^2}{a^2}AE^2 \tag{1}$$

Como además

$$MO_1 = MF - O_1F = MF - O_1E = \frac{c}{2} - \frac{b-c}{a}AE \tag{2}$$

Sustituyendo la expresión (2) en (1) obtenemos una ecuación cuya incógnita es AE

$$\left(AE-\frac{c}{2}\right)^2+\frac{(b-c)^2}{a^2}AE^2=\left(\frac{c}{2}-\frac{b-c}{a}AE\right)$$

Reduciendo términos,

$$AE^2-cAE+\frac{c\,(b-c)}{a}AE=0 \Longleftrightarrow AE=\begin{cases} 0\notin(0,c) \\ c\frac{(a-b+c)}{a}=\frac{2c(s-b)}{a}\end{cases}$$

El radio de (O_1) es OE_1y por (a)

$$r_1=OE_1=\frac{2c(s-b)(b-c)}{a^2}$$

Además el punto O_1 tiene de coordenadas

$$O_1\left(\frac{2c(s-b)}{a},\frac{2c(s-b)(b-c)}{a^2}\right)$$

Vamos ahora a calcular los segmentos AC_1 y AC_2

$$AC_1=AE+r_1=\frac{2c(s-b)}{a}+\frac{2c(s-b)(b-c)}{a^2}=\frac{4c(s-b)(s-c)}{a^2}$$
$$AC_2=AE-r_1=\frac{2c(s-b)}{a}-\frac{2c(s-b)(b-c)}{a^2}=\frac{4c(s-b)^2}{a^2}$$

Para obtener la circunferencia (O_2) del problema bastará con aplicarle a (O_1) una homotecia de centro A y radio k siendo

$$k=\frac{AC_2}{AC_1}=\frac{\frac{4c(s-b)^2}{a^2}}{\frac{4c(s-b)(s-c)}{a^2}}=\frac{s-b}{s-c}$$

Lo que nos permite afirmar que el radio r_2 de (O_2) será $r_2=\frac{s-b}{s-c}r_1$

Si a (O_2) le aplicamos la misma homotecia obtendremos (O_3). Siendo su radio $r_3=\frac{s-b}{s-c}r_2=\left(\frac{s-b}{s-c}\right)^2r_1$

Reiterando este proceso n veces el radio de (O_n) será $r_n=\left(\frac{s-b}{s-c}\right)^{n-1}r_1$

Como la superficie del círculo (O_n) es

$$S_n=\pi r_n^2=\pi\left(\frac{s-b}{s-c}\right)^{2n-2}\frac{4c^2(s-b)^2(b-c)^2}{a^4}$$

La suma de las infinitas áreas de los circulos (O_n) cuyo primer término $S_1=\pi\frac{4c^2(s-b)^2(b-c)^2}{a^4}$ y razón[1] $\left(\frac{s-b}{s-c}\right)^2$ es

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\pi\frac{4c^2(s-b)^2(b-c)^2}{a^4}}{1-\left(\frac{s-b}{s-c}\right)^2}=\frac{\pi\frac{4c^2(s-b)^2(b-c)^2}{a^4}}{\frac{(s-c)^2-(s-b)^2}{(s-c)^2}}=\pi\frac{4c^2(s-b)^2(b-c)(s-c)^2}{a^5}$$

Vamos a transformar la expresión obtenida para S

$$S=\pi\frac{4c^2(s-b)^2(b-c)(s-c)^2}{a^5}$$

donde $s=\frac{a+b+c}{2}$

[1] $\frac{s-b}{s-c}<1$

Como $(s-b)^2(s-c)^2 = \left[\frac{(a-b+c)}{2}\frac{(a+b-c)}{2}\right]^2 = \left[\frac{a^2-(b-c)^2}{4}\right]^2 =$ [2] $\left[\frac{b^2-c^2-(b-c)^2}{4}\right]^2$
Operando y simplificando:

$$(s-b)^2(s-c)^2 = \frac{1}{4}c^2\left(b-c\right)^2$$

Así pues sustituyendo en la expresión de S

$$S = \pi\frac{c^4(b-c)^3}{a^5}$$

[2] $a^2 = b^2 - c^2$