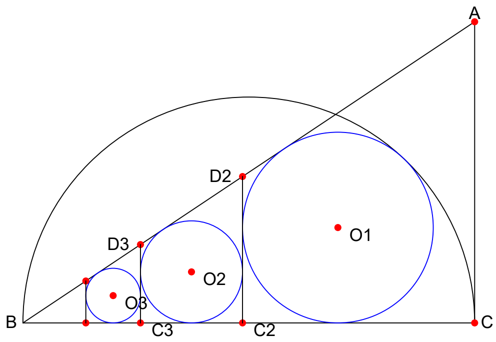
Pr. Cabri 927

Enunciado

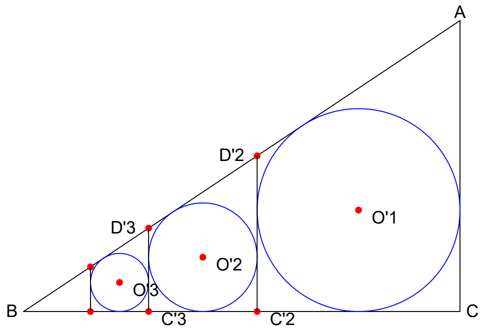


Dadas las circunferencias de la figura se trata de calcular la suma de las áreas de las circunferencias centradas en Oi con i ∊ ℤ, en función de las medidas a, b, c, de los lados del triángulo ABC.
Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega.

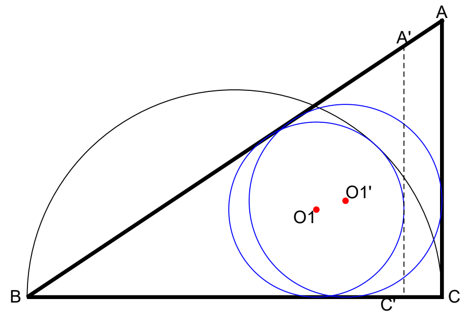
Solución

de César Beade Franco

Observemos el siguiente dibujo



El círculo O'1 tiene radio $\frac{1}{2}\,(a+b-c)$ con lo que su área es $\frac{\pi}{4}\,(a+b-c)^2$.
A partir de este radio estamos en condiciones de calcular la longitud del segmento C'2D'2 y el área del trapecio ACC'2D'2. El segmento mide $\frac{b\,(c-b)}{a}$ y dicha área es $\frac{b^2\,(c-b)}{a}$.
El área de la suma de todos los círculos está, con respecto a la del triángulo en la misma proporción que la del cículo O1 y el trapecio, es decir $\frac{\Sigma O'i}{\frac{ab}{2}} = \frac{\frac{\pi}{4}(a+b-c)^2}{\frac{b^2\,(c-b)}{a}} \Rightarrow \Sigma O'i = \frac{a^2\,(a+b-c)^2\,\pi}{8\,b\,(-b+c)}$.
Pasamos de este dibujo al del enunciado mediante una homotecia centrada en B y de razon la de los radios de O'1 y O1.



El círculo O1 es el círculo de Apolonio (uno de ellos) de las rectas AB y AC y el círculo de diámetro BC y tiene radio $-\frac{2a^2+ab+b^2-2ac-bc}{b^2}$(*).

Así pues la razón de homotecia que tranforma O'1 en O1 es k = $\frac{-\frac{a\left(2a^2+a(b-2c)+b(b-c)\right)}{b^2}}{\frac{1}{2}(a+b-c)} = \frac{2a(c-a)}{b^2}$.

De donde ΣOi = k^2ΣO'i = $\frac{a^2(a+b-c)^2\pi}{8b(c-b)}\left(\frac{2a(c-a)}{b^2}\right)^2 = \frac{a^4(a-c)^2(a+b-c)^2\pi}{2b^5(-b+c)}$

(*) Se pueden obtener los círculos de Apolonio resolviendo un sistema de 3 ecuaciones cuadráticas considerando que las distancias del centro de estos círculos a cada recta y al círculo dado son las mismas e iguales a su radio. Los cálculos se simplifican tomando el triángulo A(a,b) , B(0,0) y C(a,0), cuyos lados miden a, b y c=$\sqrt{a^2+b^2}$.