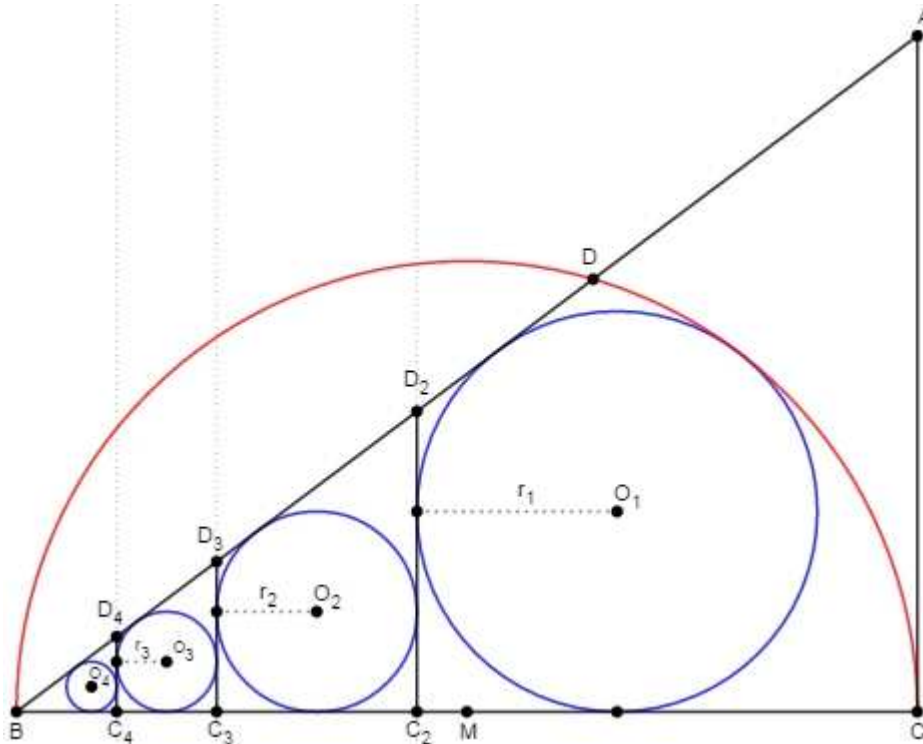


TRIÁNGULOS CABRI

Problema 927. (Miguel-Ángel Pérez García-Ortega, 2019) Dado un triángulo rectángulo ABC , se consideran el (segundo) punto D de intersección entre la recta AB y la circunferencia con diámetro BC y la circunferencia (O_1) inscrita en el triángulo mixtilíneo DBC . A continuación, para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, se considera la circunferencia (O_n) inscrita en el triángulo BC_nD_n , siendo C_n un punto de la recta BC y D_n un punto de la recta AB tales que la recta C_nD_n es paralela a la recta CA y tangente a la circunferencia (O_{n-1}) , tal como se muestra en la siguiente figura:



Calcular, en función de las longitudes a , b y c de los lados del triángulo ABC y de la forma más simplificada posible, la suma total de las áreas encerradas por las circunferencias de la sucesión $((O_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Solución:

Llamando M al punto medio del segmento BC e I_b al centro de la circunferencia exinscrita correspondiente al vértice B del triángulo ABC y considerando la inversión con respecto a la circunferencia con centro B y radio $BC = a$, se verifica que:

- ① La circunferencia (M) se transforma en la recta CA , siendo el punto C un punto fijo.
- ② La circunferencia (I_b) , cuyo radio es:

$$r_b = \frac{(ABC)}{s-b} = \frac{\frac{ab}{2}}{\frac{a-b+c}{2}} = \frac{ab}{a-b+c} = \frac{ab(-a+b+c)}{(a-b+c)(-a+b+c)} \stackrel{a^2+b^2=c^2}{=} \frac{ab(-a+b+c)}{2ab} = \frac{-a+b+c}{2}$$

TRIÁNGULOS CABRI

se transforma en la circunferencia (O_1) , cuyo radio es:

$$r_1 = \frac{a^2 r_b}{|BI_b^2 - r_b^2|} = \frac{a^2 r_b}{|BT'^2 + r_b^2 - r_b^2|} = \frac{a^2 r_b}{(a + r_b)^2} = \frac{a^2 \left(\frac{-a+b+c}{2} \right)}{\left(a + \frac{-a+b+c}{2} \right)^2} = \frac{2a^2(-a+b+c)}{(a+b+c)^2}$$

③ El punto T es la imagen del punto T' , por lo que:

$$BT = \frac{a^2}{BT'} = \frac{a^2}{a + r_b} = \frac{a^2}{a + \frac{-a+b+c}{2}} = \frac{2a^2}{a+b+c}$$

Además:

☺ Los triángulos FBE y D_2BC_2 son semejantes, por lo que:

$$r_2 = r_b \left(\frac{BT - r_1}{a + 2r_b} \right) = \frac{-a+b+c}{2} \left[\frac{\frac{2a^2}{a+b+c} - \frac{2a^2(-a+b+c)}{(a+b+c)^2}}{a + 2\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)} \right] = \frac{2a^3(-a+b+c)}{(a+b+c)^2(b+c)}$$

☹ Los triángulos FBE y D_3BC_3 son semejantes, por lo que:

$$\begin{aligned} r_3 &= r_b \left(\frac{BT - r_1 - 2r_2}{a + 2r_b} \right) \\ &= \frac{-a+b+c}{2} \left[\frac{\frac{2a^2}{a+b+c} - \frac{2a^2(-a+b+c)}{(a+b+c)^2} - \frac{4a^3(-a+b+c)}{(a+b+c)^2(b+c)}}{a + 2\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)} \right] \\ &= \frac{2a^4(-a+b+c)}{(a+b+c)^2(b+c)^2} \end{aligned}$$

y, por tanto, podemos intuir que:

$$\forall n \in \mathbb{N} : r_n = \frac{2a^{n+1}(-a+b+c)}{(a+b+c)^2(b+c)^{n-1}} = \left[\frac{2a^2(-a+b+c)}{(a+b+c)^2} \right] \left(\frac{a}{b+c} \right)^{n-1}$$

lo cual vamos a probar utilizando el método de inducción completa:

❶ Para $n = 1$, se verifica que:

$$r_1 = \frac{2a^2(-a+b+c)}{(a+b+c)^2} = \frac{2a^{1+1}(-a+b+c)}{(a+b+c)^2(b+c)^{1-1}}$$

❷ Para cada número natural $p \geq 2$, supondremos cierto que:

$$\forall k \in \{2, \dots, p\} : r_k = \left[\frac{2a^2(-a+b+c)}{(a+b+c)^2} \right] \left(\frac{a}{b+c} \right)^{k-1}$$

TRIÁNGULOS CABRI

- ③ Para $n = p + 1$, como los triángulos FBE y $D_{p+1}BC_{p+1}$ son semejantes, utilizando la hipótesis de inducción, resulta que:

$$\begin{aligned}
 r_{p+1} &= r_b \left(\frac{BT - r_1 - 2 \sum_{k=2}^p r_k}{a + 2r_b} \right) \\
 &= \frac{-a+b+c}{2} \left[\frac{\frac{2a^2}{a+b+c} - \frac{2a^2(-a+b+c)}{(a+b+c)^2} - 2 \left[\frac{2a^2(-a+b+c)}{(a+b+c)^2} \right] \sum_{k=2}^p \left(\frac{a}{b+c} \right)^{k-1}}{a + 2 \left(\frac{-a+b+c}{2} \right)} \right] \\
 &= \frac{-a+b+c}{2(b+c)} \left[\frac{4a^3}{(a+b+c)^2} - \frac{4a^2(-a+b+c)}{(a+b+c)^2} \sum_{k=2}^p \left(\frac{a}{b+c} \right)^{k-1} \right] \\
 &= \frac{2a^2(-a+b+c)}{(a+b+c)^2(b+c)} \left[a - (-a+b+c) \left[\frac{a(b+c)^{p-1} - a^p}{(-a+b+c)(b+c)^{p-1}} \right] \right] \\
 &= \frac{2a^2(-a+b+c)}{(a+b+c)^2(b+c)} \left[a - \frac{a(b+c)^{p-1} - a^p}{(b+c)^{p-1}} \right] \\
 &= \frac{2a^2(-a+b+c)}{(a+b+c)^2(b+c)} \left[\frac{a^p}{(b+c)^{p-1}} \right] \\
 &= \left[\frac{2a^2(-a+b+c)}{(a+b+c)^2} \right] \left(\frac{a}{b+c} \right)^p
 \end{aligned}$$

Finalmente, como $0 < \frac{a}{b+c} < 1$ y:

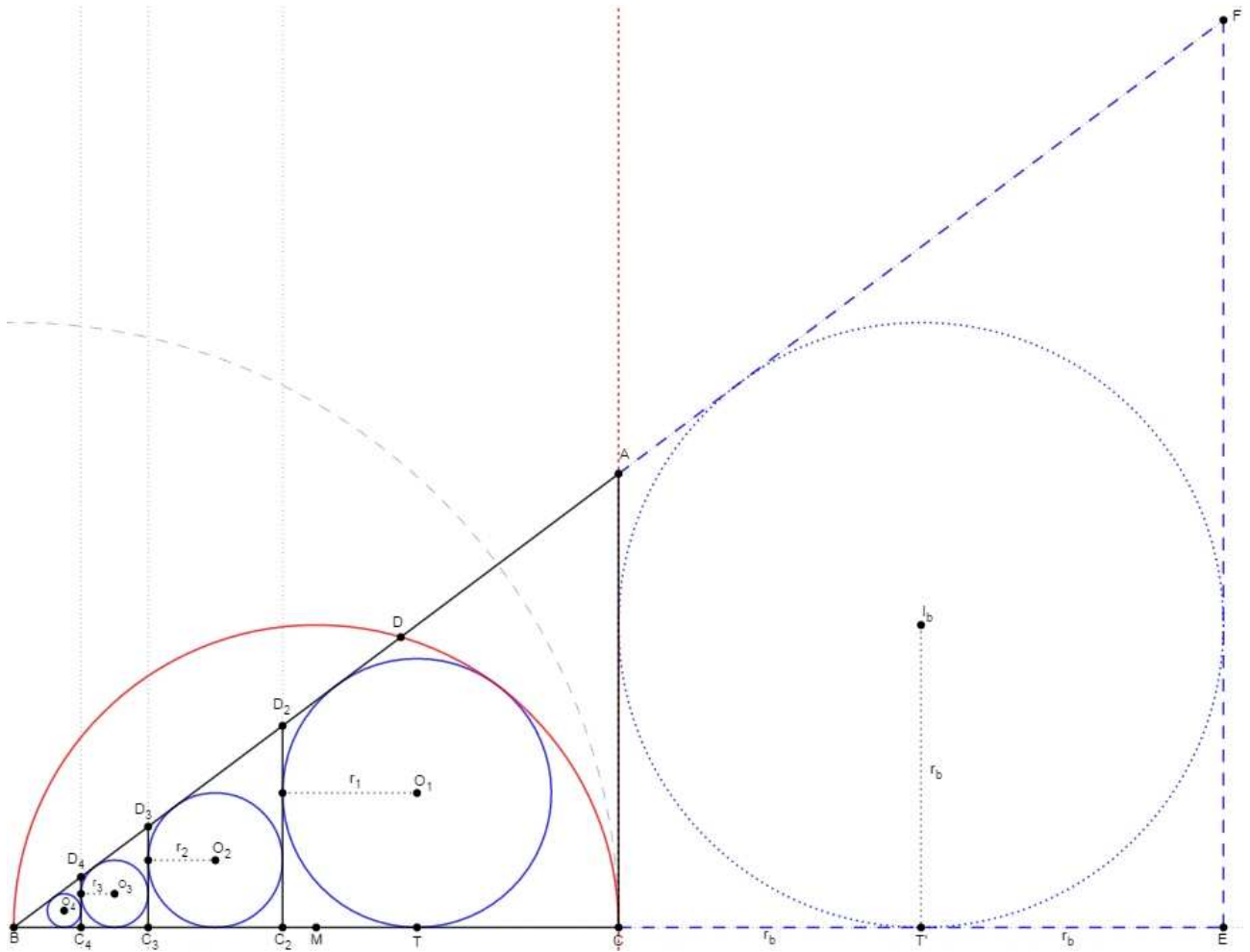
$$\begin{cases} (a+b+c)^2 \underset{c^2=a^2+b^2}{=} 2(a+c)(b+c) \\ (-a+b+c)(a+b+c) \underset{c^2=a^2+b^2}{=} 2b(b+c) \end{cases}$$

resulta que la suma total de las áreas encerradas por las circunferencias de la sucesión $((O_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es:

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \pi \sum_{n=1}^{+\infty} r_n^2 \\
 &= \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2a^{n+1}(-a+b+c)}{(a+b+c)^2(b+c)^{n-1}} \right]^2 \\
 &= \frac{4\pi a^4(-a+b+c)^2}{(a+b+c)^4} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a}{b+c} \right)^{2(n-1)} \\
 &= \frac{\pi a^4(-a+b+c)^2}{(a+c)^2(b+c)^2} \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{a}{b+c} \right)^2} \right] \\
 &= \frac{\pi a^4(-a+b+c)^2}{(a+c)^2} \left[\frac{1}{(b+c)^2 - a^2} \right] \\
 &= \frac{\pi a^4(-a+b+c)}{(a+c)^2(a+b+c)}
 \end{aligned}$$

TRIÁNGULOS CABRI

$$\Delta = \frac{\pi a^4(-a+b+c)(a+b+c)}{(a+c)^2(a+b+c)^2} = \frac{2\pi a^4 b(b+c)}{2(a+c)^3(b+c)} = \frac{\pi a^4 b}{(a+c)^3}$$



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega