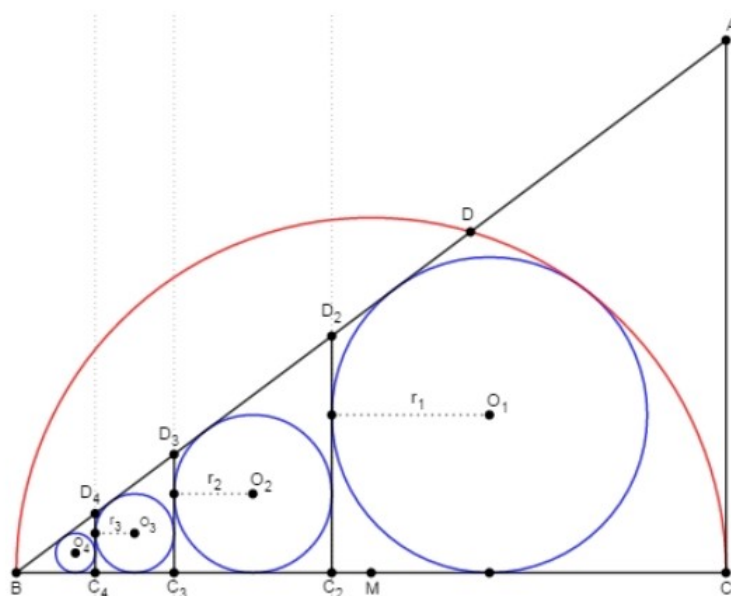


Problema 927.-

Dado un triángulo rectángulo ABC , se consideran el (segundo) punto D de intersección entre la recta AB y la circunferencia con diámetro BC y la circunferencia (O_1) inscrita en el triángulo mixtilíneo DBC . A continuación, para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, se considera la circunferencia (O_n) inscrita en el triángulo BC_nD_n , siendo C_n un punto de la recta BC y D_n un punto de la recta AC tales que la recta C_nD_n es paralela a la recta CA y tangente a la circunferencia (O_{n-1}) , tal como se muestra en la siguiente figura:



Calcular, en función de las longitudes a , b y c de los lados del triángulo ABC y de la forma más simplificada posible, la suma total de las áreas encerradas por las circunferencias de la sucesión $((O_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Pérez, M. A. (2019): Comunicación personal.

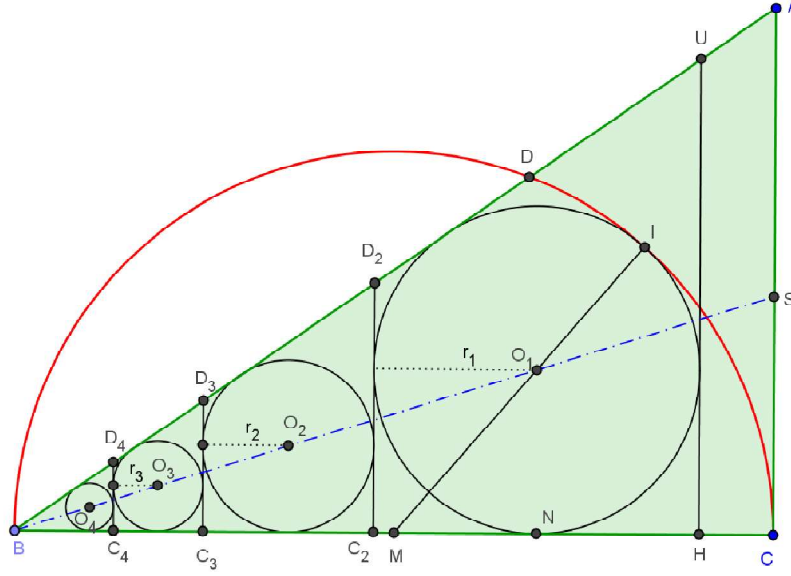
Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

M es el punto medio de BC . Llamamos $[O_1]$ al área del círculo (O_1) de centro O_1 ; necesitamos su radio para poder calcularla. Para ello vamos a ver qué condiciones ha de cumplir (O_1) para ser tangente a la semicircunferencia centrada en M y a los lados BC y BA del triángulo. Para esto último es necesario que su centro $O_1 = (x_1, y_1)$ esté situado sobre la bisectriz del ángulo B . (Obsérvese que y_1 es el radio de la circunferencia (O_1)). Suponiendo unos ejes de coordenadas con M como origen y el lado BC en las abscisas, poniendo $B(-\frac{a}{2}, 0)$; $C(\frac{a}{2}, 0)$ y $A(\frac{a}{2}, b)$, $a^2 + b^2 = c^2$.

Según el teorema de la bisectriz la longitud del segmento CS es $CS = \frac{ba}{a+c}$ y por tanto la ecuación de la bisectriz de B es

$$y = \frac{b}{a+c} \left(x + \frac{a}{2} \right).$$

La semicircunferencia (M) tiene ecuación $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$, $y \geq 0$. La recta MO_1 tiene como ecuación $y = \frac{y_1}{x_1} \cdot x$. Para que $I \in (O_1)$ sea el punto de tangencia con la semicircunferencia se ha de verificar (teniendo en cuenta que el radio de (O_1) es y_1) que



$$MI = \frac{a}{2} = MO_1 + O_1I = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + y_1 \Rightarrow \left(\frac{a}{2} - y_1\right)^2 = x_1^2 + y_1^2 \Rightarrow y_1 = \frac{a^2 - x_1^2}{a}.$$

Las coordenadas del punto O_1 , además de la relación anterior también verifican la ecuación de la bisectriz de B . Es por ello la solución del sistema

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{b}{a+c} \left(x + \frac{a}{2}\right) \\ y &= \frac{\frac{a^2}{4} - x^2}{a} \end{aligned} \right\}$$

La solución obtenida es $x_1 = \frac{a(a-2b+c)}{2(a+c)}$, $y_1 = \frac{ab(a-b+c)}{(a+c)^2}$.

En el dibujo hemos trazado HU paralela a C_2D_2 y tangente a (O_1) . Tenemos

$$BC_2 = BN - r_1 = (BM + x_1) - r_1 = \left(\frac{a}{2} + x_1\right) - y_0 = \frac{a(a-b+c)^2}{(a+c)^2}$$

$$BH = BN + r_1 = \frac{a}{2} + x_1 + y_1 = \frac{a(a+b+c)(a-b+c)}{(a+c)^2}$$

Sabemos que las áreas de los círculos (O_i) están en progresión geométrica. La razón de esta progresión es el cuadrado de $\mu = \frac{BC_2}{BH} = \frac{s-b}{s} < 1$.

La suma de las áreas de todos estos círculos es

$$S = [O_1] \cdot (1 + \mu^2 + \mu^4 + \dots) = \frac{[O_1]}{1 - \mu^2},$$

donde

$$\frac{1}{1 - \mu^2} = \frac{1}{1 - \frac{(s-b)^2}{s^2}} = \frac{s^2}{s^2 - (s-b)^2} = \frac{s^2}{b(a+c)}.$$

Para (O_1) , calculamos su área a partir de su radio, que hemos visto, es igual a $y_1 = \frac{2ab(s-b)}{(a+c)^2}$, tendremos

$$[O_1] = \pi \cdot \frac{4a^2b^2(s-b)^2}{(a+c)^4}$$

De ahí resulta la suma de todas esas áreas $S = \pi \cdot \frac{4a^2b(s-b)^2s^2}{(a+c)^5}$

Calculando $4s(s-b) = [(a+c)+b][(a+c)-b] = (a+c)^2 - b^2 = a^2 + a^2 + 2ac = 2a(a+c)$ y por tanto $4(s-b)^2s^2 = a^2(a+c)^2$ y sustituyendo resulta finalmente

$$S = \pi \cdot \frac{a^4b}{(a+c)^3}$$

■