

Problema 928.-

Sean O el circuncentro del triángulo ABC , D el punto medio de AB y E el baricentro del triángulo ACD . Demostrar que la línea CD es perpendicular a la línea OE si y solo si $AB = AC$.

Fondanaiche, P. (2019). *Balkan Math Olympiad (1985) Segundo problema.*

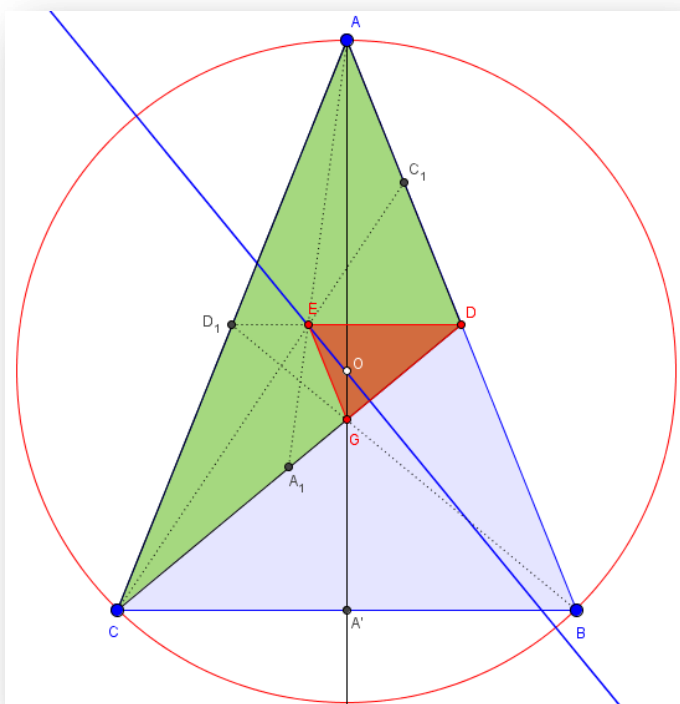
Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

$$AB = AC \Rightarrow CD \perp OE$$

De la construcción realizada observamos el siguiente hecho de interés:

El punto G , baricentro del $\triangle ABC$, determina en la mediana CD la relación conocida $GD = \frac{1}{3}CD$.

El punto E , baricentro del $\triangle ACD$, determina en la mediana CC_1 la relación conocida $EC_1 = \frac{1}{3}CC_1$.



Por tanto, EG es paralela al lado AB .

Como quiera que $AB \perp DO$, ha de suceder también que $EG \perp DO$.

Sabemos que ED es la paralela media a la base BC del triángulo ABC , y al ser el triángulo isósceles ($AB = AC$), resultará que $AA' \perp DE$, siendo A' , punto medio del lado BC .

Pero como AA' pasa por el punto O y G , tenemos que $OG \perp DE$. En definitiva, el punto O es el ortocentro del $\triangle DEG$.

Y como consecuencia, la tercera altura ha de pasar por G .

Así tenemos que $GD \perp OE \rightarrow \mathbf{CD \perp OE}$.

$$CD \perp OE \Rightarrow AB = AC$$

En este caso y considerando el mismo triángulo $\triangle DEG$. Tenemos que por hipótesis, $CD \perp OE \rightarrow GD \perp OE$. También sucede que $EG \perp DO$.

Por tanto, el punto O es el ortocentro de $\triangle DEG$. En consecuencia, la tercera altura GO , (G =baricentro y O =circuncentro), deberá ser perpendicular al lado ED . Al estar ED en la paralela media DD_1 del lado BC en $\triangle ABC$. Por tanto si es perpendicular a BC , es que necesariamente el triángulo es isósceles, siendo $\mathbf{AB = AC}$.