Propuesto por Philippe Fondanaiche

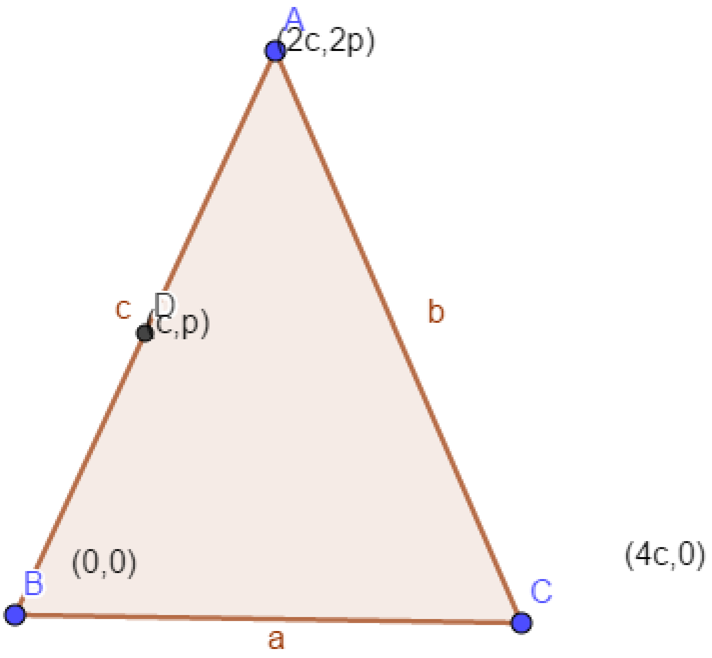
Problema 928

Sean O el circuncentro del triangulo ABC ,D el punto medio de AB y E el baricentro del triángulo ACD.
Demostrar que la línea CD es perpendicular a la línea OE si y solo si AB = AC.

Balkan Math Olympiad (1985) Segundo problema

Solución del director

Sin pérdida de generalidad podemos suponer:



Así es $\overrightarrow{CD}(-3c, p)$

El punto E, baricentro de A(2c,2p), D(c,p), C(4c,0) es E$(\frac{7c}{3}, p)$

Si F es el punto medio de BC, la recta OF es x=2c.

La recta OD es $y - p = -\frac{c}{p}(x - c)$

Así, tenemos O(2c, $\frac{p^2-c^2}{p}$).

Luego $\overrightarrow{OE} = (\frac{c}{3}, \frac{c^2}{p})$. Al ser $\overrightarrow{CD}\ \overrightarrow{OE} = -c^2 + c^2 = 0, tenemos\ que\ son\ perpendiculares, cqd.$

Supongamos ahora que en un triángulo ABC tenemos $\overrightarrow{CD}\ \overrightarrow{OE} = 0$

Sean, sin pérdida de generalidad, B(0,0), C(4c,0), A(2m, 2p).

Tenemos:

$$\overrightarrow{CD}(m-4c,p)$$

E es el baricentro de A(2m,2p), C(4c,0), D(m,p), $E(\frac{3m+4c}{3},p)$

Siendo F el punto medio de BC, es F(2c,0) y la mediatriz de BC es la recta OF x=2c.

La mediatriz de AB es la recta DO $y-p=-\frac{m}{p}(x-m)$

O es la intersección de ambas mediatrices: O$\left(2c,\frac{p^2+m^2-2cm}{p}\right)$

Así, es $\overrightarrow{OE}(\frac{3m-2c}{3},\frac{-m^2+2cm}{p})$

$$\overrightarrow{CD}\,\overrightarrow{OE}=\frac{3m^2-12\,mc-2cm+8c^2}{3}-m^2+2cm=\frac{-8cm+8c^2}{3}$$

Al igualar a cero, tenemos dos soluciones, c=0, triángulo degenerado en un punto

c=m, lo que nos da AB=AC, c.q.d.

Ricardo Barroso Campos. Jubilado. Sevilla. España.