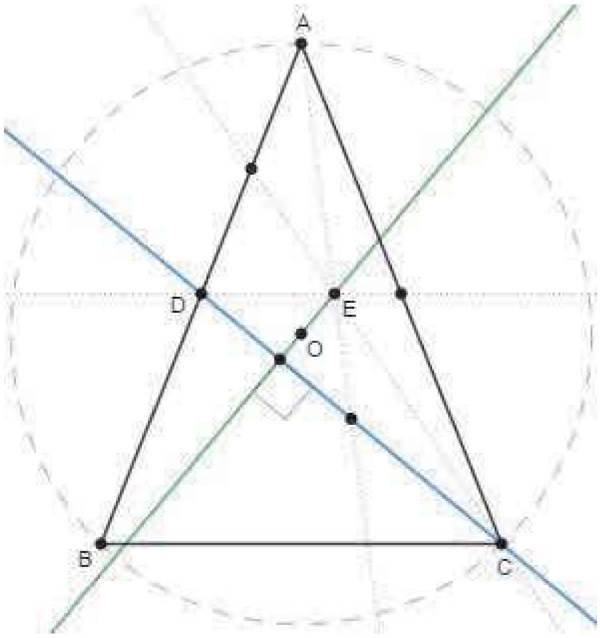
<u>Problema 928.</u> (Balkan Math Olympiad (1985), segundo problema, propuesto por Philippe Fondanaiche) Sean O el circuncentro del triángulo ABC, D el punto medio del segmento AB y E el baricentro del triángulo ACD. Demostrar que:

$$CD \perp OE \Leftrightarrow AB = AC$$



<u>Solución:</u>

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como $D = (1 : 1 : 0)$, entonces:

$$E = (3 : 1 : 2) = (3S^2 : S^2 : 2S^2)$$

(S es el doble del área del triángulo ABC)

y como:

$$O = (a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C) = (3a^2 S_A : 3b^2 S_B : 3c^2 S_C)$$

resulta que el punto del infinito de la recta OE es:

$$OE_\infty = (3a^2 S_A - 3S^2 : 3b^2 S_B - S^2 : 3c^2 S_C - 2S^2)$$

Además, como:

$$CD \equiv x - y = 0$$

entonces, el punto del infinito de las rectas perpendiculares a la recta CD es:

$$CD_\infty^\perp = (-S_B - 2S_C : 2S_C + S_A : -S_A + S_B)$$

Finalmente, como:

$$(3a^2S_A - 3S^2, 3b^2S_B - S^2, 3c^2S_C - 2S^2) \times (-S_B - 2S_C, 2S_C + S_A, -S_A + S_B) = 2S^2(b-c)(b+c)(1,1,1)$$

entonces:

$$CD \perp OE \Leftrightarrow OE_\infty = CD_\infty^\perp \Leftrightarrow 2S^2(b-c)(b+c) = 0 \Leftrightarrow b = c \Leftrightarrow AB = AC$$