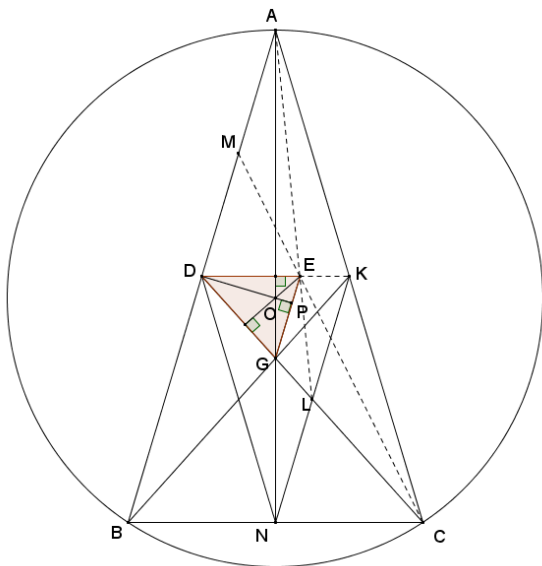


Problema 928

Sean O el circuncentro del triángulo ABC , D el punto medio de AB y E el baricentro del triángulo ACD .

Demostrar que la línea CD es perpendicular a la línea OE si y solo si $AB = AC$.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



1^{er} cas $AB = AC$

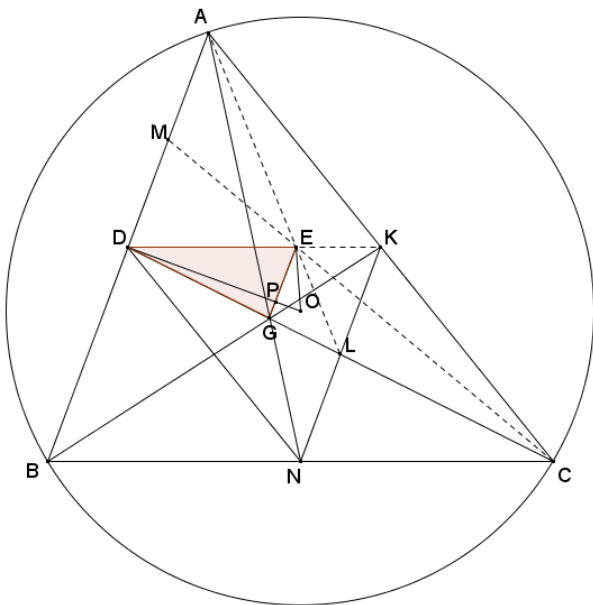
Lemme : le triangle DEG admet O pour orthocentre.

Démonstration : la médiane AN du triangle ABC passe par O centre du cercle circonscrit à ABC et par G centre de gravité du triangle ABC est perpendiculaire à DK médiane du triangle ACD issue de D qui est parallèle à BC. La droite [GA] est donc la hauteur du triangle DEG issue de G.

D'autre part la droite [OD] est la médiatrice de AB passant par O .Comme la droite [EG] est parallèle à AB (d'après le théorème de Thalès : $CG/CD = CE/CM = 2/3$), la droite [OD] perpendiculaire au côté EG donne la hauteur DP du triangle DEG issue de D.

Le point O à l'intersection des droites [GA] et [DP] est donc l'orthocentre du triangle DEG.

Corollaire : la droite [OE] issue de E dans ce même triangle est perpendiculaire au côté DG, donc à CD.



2^{ème} cas EO est perpendiculaire à CD.

La droite [EO] est alors la hauteur issue de E dans le triangle DEG.

Par construction la droite [OD] est la médiatrice de AB et la droite [EG] est parallèle à AB (cf supra).

Donc la droite [OD] est perpendiculaire à la droite [EG]. La droite [OD] est donc la hauteur issue de D dans le triangle DEG.

Le point d'intersection O des droites [OD] et [EG] est donc l'orthocentre du triangle DEG et la droite [GO] est la hauteur issue de G dans ce même triangle. Comme la droite [DE] est parallèle à BC, la droite [GO] est perpendiculaire à BC et passe par le milieu N de BC. Les points A, O, G et N sont alignés et le triangle ABC est isocèle de sommet A avec $AB = AC$.