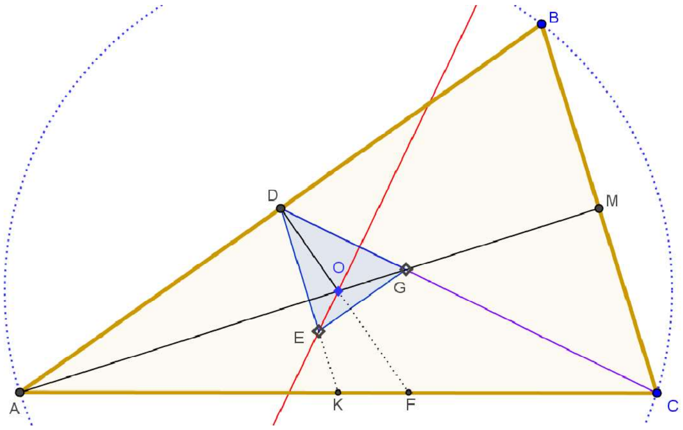
Extra del 15 de Diciembre de 2019 al 29 de febrero de 2020

Propuesto por Philippe Fondanaiche.

***Problema* 928**.- *Sean O el circuncentro del triangulo ABC, D el punto medio de AB y E el baricentro del triángulo ACD. Demostrar que la línea CD es perpendicular a la línea OE si y solo si $AB = AC$.*

Balkan Math Olympiad (1985) Segundo problema

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Sean M el punto medio de BC y G el baricentro de ABC. Cualquiera que sea el triángulo ΔABC, DE es paralela a BC (une los puntos medios de dos lados) y EG es paralela a AB pues los puntos E y G, baricentros de los triángulos ΔACD y ΔABC respectivamente, equidistan de AB $\left(d(E;AD) = \frac{1}{3}h_C = d(G;AB)\right)$.

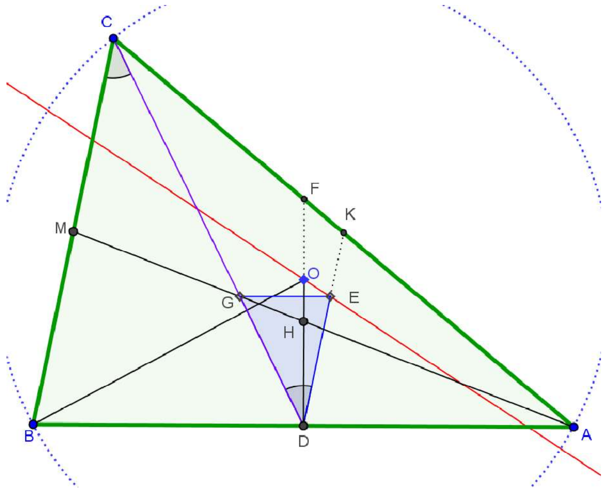
También se verifica que $OD \perp AB$, pues O es el circuncentro.

En resumen, se tiene $DE \parallel BC$; $EG \parallel AB$ y $OD \perp EG$.

Sea $H = AM \cap OD$

Supongamos que el triángulo es isósceles, con $AB = AC$.

En este caso, $GA \perp DE$ y AM pasa por O y siendo así, $H = O$. Por tanto, las rectas OD y GA son alturas del triángulo ΔDEG y O su ortocentro, por tanto OE es la tercera altura y $OE \perp DG$ como queríamos demostrar.



Recíprocamente si $h_E = OE \perp DG$ y también $h_D = OD \perp EG$ entonces O es el ortocentro del triángulo ΔDEG y $h_G = OG$ es la tercera altura del mismo, $OG \perp BC$, coincide con la mediatriz de BC: G está al mismo tiempo en la mediatriz de BC y en la mediana de A, eso solo es posible si $AB = AC$.■

UNA CUESTIÓN APARTE

Los triángulos DEG y CBD son semejantes (razón 3) ya que G es el baricentro de ABC y por tanto $CD = 3GD$.

DE corta a AC en K, punto medio de AC, por ser E el baricentro. A su vez, DE es paralela a BC (la paralela media). $DE = \frac{2}{3} \cdot DK = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} CB = \frac{1}{3} CB$. Se tiene $\measuredangle EDG = \measuredangle DCB$ y como los lados son proporcionales se tiene la semejanza entre esos triángulos.