

★ $\odot(OBC)$ quarter of circle (O, OB)

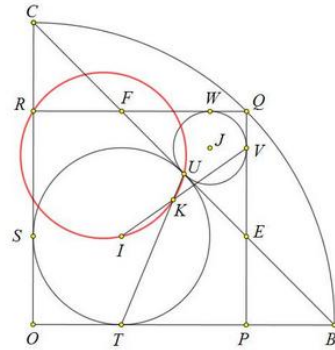
★ $OPQR$ square inscribed in mixtilinear triangle OBC

★ $E = PQ \cap BC, F = RQ \cap BC$

★ I, J incenters of $\triangle OBC, \triangle FQE$, resp.

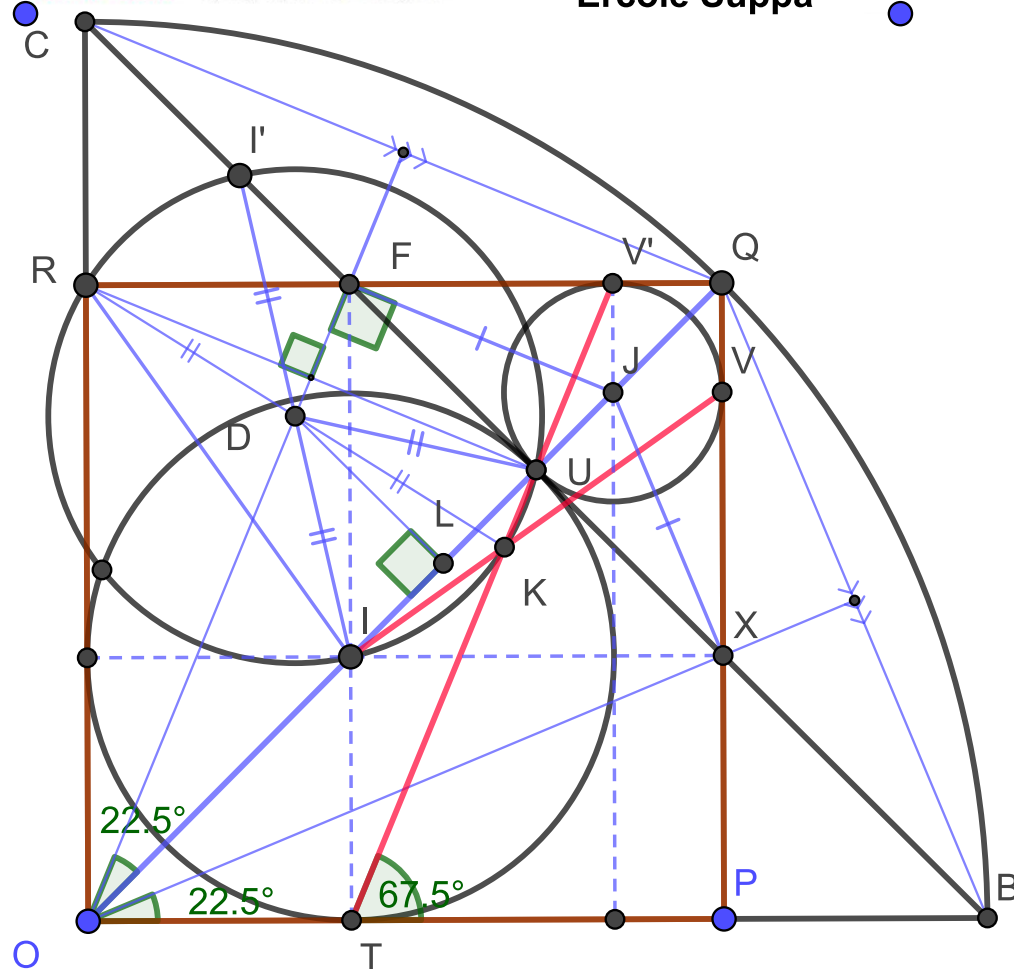
★ S, T, U, V, W touch points

★ $K = IV \cap TU$



Prove that: I, K, U, R are concyclic

Ercole Suppa



Si demuestro que RK es diámetro de (D) . Podré afirmar que la circunferencia centrada en D y que pasa por R, I, U también pasa por K y su radio es $\frac{a}{2} \sqrt{30 - 21\sqrt{2}}$ $\Leftrightarrow$ Los puntos R, I, U, K son concíclicos

La recta OF es bisectriz de las rectas OR y OU . Es mediatriz del segmento RUD es el punto de intersección entre la recta OF y La mediatriz de IU

D es el centro de la circunferencia que pasa por RIU ya que equidista de los puntos R, I, U : Vamos a calcular su radio

$$OP = a \quad OB = OC = OQ = a\sqrt{2} \quad CB = 2a \quad S_{\triangle OBC} = a^2 \quad \text{Perímetro}_{\triangle OBC} = 2a\sqrt{2} + 2a = 2a(\sqrt{2} + 1)$$

$$UI = \text{radio}(I) = \frac{S_{\triangle OBC}}{\text{Semiperímetro}_{\triangle OBC}} = a(\sqrt{2} - 1) \quad OU = UC = UB = a \quad IL = LU = \frac{IU}{2}$$

$$\triangle BPX = \triangle RCF \sim \triangle OCB \quad PB = PX = RC = RF = a(\sqrt{2} - 1) \quad CF = BX = a(2 - \sqrt{2})$$

$$\text{Los datos del } \triangle FQX \text{ son} \quad QX = FQ = a - a(\sqrt{2} - 1) = a(2 - \sqrt{2}) \quad FX = 2a - 2a(2 - \sqrt{2}) = 2a(\sqrt{2} - 1)$$

$$UJ = \text{radio}(J) = \frac{S_{\triangle FQX}}{\text{Perímetro}_{\triangle FQX}} = \frac{\frac{a^2(2-\sqrt{2})^2}{2}}{a} = \frac{a(2-\sqrt{2})^2}{2} = a(3 - 2\sqrt{2}) \quad UX = UQ = UF = a(\sqrt{2} - 1)$$

$$\text{En el } \triangle OLD \text{ rectángulo en } D \text{ sabemos que} \quad OL = a - \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{2} = \frac{a(3 - \sqrt{2})}{2} \quad \text{como} \quad \text{ang}(LOD) = 22.5^\circ$$

$$\text{y} \quad \tan 22.5^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ}} = \sqrt{2} - 1 \quad DL = OL \cdot \tan 22.5^\circ = \frac{a(3 - \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)}{2} = \frac{a(4\sqrt{2} - 5)}{2}$$

$$OD = \sqrt{OL^2 + DL^2} = \sqrt{\frac{a^2(3 - \sqrt{2})^2}{4} + \frac{a^2(4\sqrt{2} - 5)^2}{4}} = \frac{a}{2} \sqrt{68 - 46\sqrt{2}}$$

Vamos a calcular $DI=DU$: Como $\triangle DIL$ es rectángulo en L

$$DI = \sqrt{DL^2 + IL^2} = \sqrt{\frac{a^2(4\sqrt{2} - 5)^2}{4} + \frac{a^2(\sqrt{2} - 1)^2}{4}} = \frac{a}{2} \sqrt{30 - 21\sqrt{2}}$$

$$\text{Por el teorema del coseno en el } \triangle ODR \quad OR = a \quad OD = \frac{a}{2} \sqrt{68 - 46\sqrt{2}} \quad \text{ang}(DOR) = 22.5^\circ \cos 22.5^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$RD = \sqrt{OR^2 + OD^2 - 2OR \cdot OD \cos 22.5^\circ} = a \sqrt{1 + \frac{(68 - 46\sqrt{2})}{4} - \frac{1}{2} \sqrt{68 - 46\sqrt{2}} \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \frac{a}{2} \sqrt{30 - 21\sqrt{2}}$$

$$\frac{a}{2} \sqrt{30 - 21\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Los puntos } R, I, U, K \text{ son concíclicos}$$



Al ser $RV^2 = IV^2 + RI^2 \Leftrightarrow \triangle RIV$ es rectángulo en I

Como RI es perpendicular y K pertenece al segmento IV es evidente que RI es perpendicular a IK.

Al ser R e I puntos de (D) es evidente que RK es su diámetro

Como RI es perpendicular y K pertenece al segmento IV es evidente que RI es perpendicular a IK.

Al ser R e I puntos de (D) es evidente que RK es su diámetro