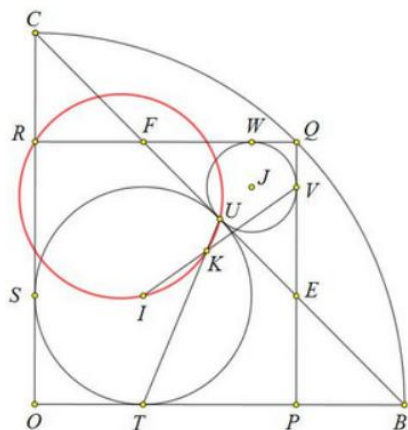


Problema 929.-

Se considera el cuadrante del círculo (O, OB) .



Sea $OPQR$ el cuadrado inscrito en el triángulo mixtilíneo OBC . Sean $E = PQ \cap BC$, $F = RQ \cap BC$.

Sean los puntos I, J incentros de $\triangle OBC$, $\triangle FQE$, respectivamente.

Sean los puntos de dichos triángulos de tangencia con sus circunferencias inscritas. Sea, por fin, $K = IV \cap TU$.

Probar que I, K, U, R son concíclicos.

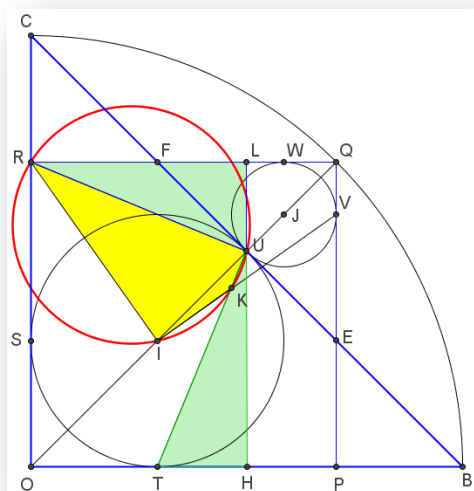
Suppa, E. (2019): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

Sea el triángulo rectángulo isósceles OBC de catetos $OB = OC = a$. De la igualdad entre las expresiones del área del triángulo OBC , $S = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}r \cdot (2a + \sqrt{2}a) \rightarrow r = a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, siendo r el radio de la circunferencia inscrita a dicho triángulo. De este modo, el lado l del cuadrado $OPQR$, $l = a - r = a\frac{\sqrt{2}}{2}$. Por otra parte, el triángulo isósceles QER tiene como catetos $QE = QF = l - r = a(\sqrt{2} - 1)$. De este modo, el radio r' de la circunferencia inscrita en dicho triángulo tendrá como valor $r' = (\sqrt{2} - 1)r$. Observamos que $l = 2r + r'$.

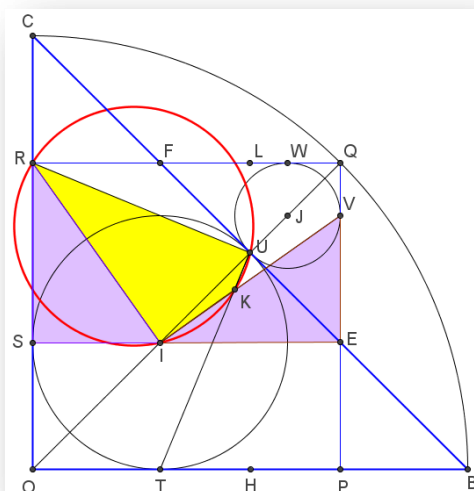
Probaremos que $UR \perp UT$; $IR \perp IK$. Así, de este modo los puntos $IKUR$ serán concíclicos.

$UR \perp UT$



Sea l el lado del cuadrado $OPQR$. Probaremos que UR y UT son perpendiculares. Esto es así, ya que U, L y H están alineados, donde L y H son los puntos medios de FQ y TP , respectivamente. Entonces los triángulos rectángulos UHT y ULR son equivalentes por ser $UL = HT = \frac{1}{4}l$. Por tanto, $UR \perp UT$.

$IR \perp IK$



Sean l el lado del cuadrado $OPQR$ y r y r' , los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos OBC y QEF , respectivamente. La paralela media SE del cuadrado $OPQR$ pasa por el punto I ya que $OS = PE = r$. Entonces los triángulos rectángulos ISR y VEI son equivalentes por ser:
 $\{IS = r; RS = l - r\}$ y
 $\{EI = l - r, EV = l - r - r' = r\}$.
 Por tanto, $IR \perp IK$.